Forelesning 1 Mek4250 1)

- 2 obliger
- øvelser onsdager (opp på tavlen)
- FEniCS, FEniCSx, Firedrake
  evt andre tools
- Hva med noen sammenlikninger
  med nevrale nettverk?

Vi skal se på

Navier-Stokes likninger (inkomp Newtonsk)

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \vec{f}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

Inneholder mye !

1. $-\nabla^2\vec{v} = f$ elliptisk
2. $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \mu\nabla^2\vec{v} = f$ conv-diff
3. $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \mu\nabla^2\vec{v} = f$ parabolsk
4. $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = f$ hyperbolsk
5. $\mu\nabla^2\vec{v} - \nabla p = f$ saddle punkt

   $\nabla\cdot\vec{v} = 0$

3)

"Alle" de forskjellige klassene krever forskjellige type diskretiseringer.

$\Longrightarrow$

Det er en jungel av metoder der ute.

Her skal vi prøve å skape litt orden slik at det ikke fremstår så krevende.

La oss derfor begynne med alle PDEer's mor :

Elliptiske likninger / Poisson problemer

Finn u ~~dee~~ slik at følgende likning løses :

$$-\nabla\cdot(k\nabla u) = f \quad \text{i } \Omega \qquad (1)$$

$$u = g \quad \text{på } \partial\Omega_D \qquad (2)$$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = h \qquad (3)$$

5)

Hva betyr så dette?

Direkte så betyr ¡)

For hver x i Ω

så skal

$$-\nabla \cdot \big(k(x) \nabla u(x) \big) = f(x)$$

gjelde !!

Altså for hver x skal

jeg for eksempel kunne derivere

u to ganger.

$$f \in C(\Omega) \Rightarrow u \in C^2(\Omega)$$

Dette er en naturlig tolkning, men den er feil!

For eksempel vil <u>ingen</u> av de løsningene vi regner ut ved hjelp av element metoden tilfredsstille dette.

(?)

En annen ting: Vi vil i dette kurset sammenlikne matriser og differensial operatorer.

En matrise må være kvadratisk, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, for å være

<u>ikke-singulær</u>

La oss tenke oss at vi har ett enhetskvadrat med

$N = n \times n$ indre punkter

For hvert punkt

$\vec{x}_i = (x_j, y_k) \qquad i = j \cdot N + k$

har vi altså likningen

$-\nabla \cdot (k(\vec{x}_i) \nabla u(\vec{x}_i)) = f(\vec{x}_i)$

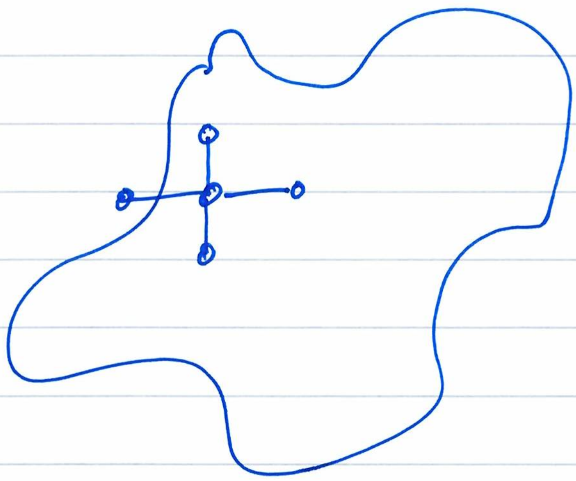
u må da være en

funksjon med $N = n \times n$
ukjente for at vi skal
få N ukjente og N likninger.

Feks FDM gjør dette ved å velge
punktverdier. Dette gjør man ikke i
nevrale nettverk.

En tredje observasjon:

Vi bør kunne tilpasse metoden til et grid/område



En stensil vil kutte randen på feil måte med mindre geometrien er svært enkel.

Et lemma vi vil bruke mange ganger i kurset: Gauss-Green

$$\boxed{\int_\Omega -\nabla\cdot(k\nabla u)\, v\, dx = \int_\Omega (k\nabla u)\cdot\nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial n} v\, ds}$$

Svak ~~formlerein~~ formulering utledes på følgene måte

1. Likningen ganges med en test funksjon v og integreres
2. Man benytter Gauss-Green (eller liknende)
3. Man benytter rand-betingelser

1. $$-\nabla\cdot(k\nabla u) = f$$

$$\hookrightarrow \int_\Omega -\nabla\cdot(k\nabla u)\cdot v\,dx = \int_\Omega f\cdot v\,dx$$

2. $$\int_\Omega -\nabla\cdot(k\nabla u)\,v =$$

$$\int_\Omega (k\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial n}\,v\,ds = \int_\Omega f\cdot v\,dx$$

3. Rand betingelser

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega_D$$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{on } \partial\Omega_N$$

Hva er v her ?

Vel dersom $u = g$ så er ikke funksjonen ukjent.

Dermed velger vi $v = 0$ og fjerner likningen ettersom vi ikke har noen ukjent der

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,ds = \underbrace{\int_{\partial\Omega_D} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,ds}_{v=0} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_N} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,ds}_{\boxed{k\frac{\partial u}{\partial n} = h}}$$

$k\frac{\partial u}{\partial n}$ er kjent, men u er ikke kjent

$$= \int_{\partial\Omega_N} h\,v\,ds$$

Oppsummering :

$$\int -\nabla\cdot(k\nabla u)\, v = \int (k\nabla u)\cdot\nabla v$$

$$- \int_{\partial\Omega_N} h\, v\, ds = \int_{\Omega} f\, v\, dx$$

Dette leder oss til svak formulering

Finn u slik at

$$\int_{\Omega} (k\nabla u)\cdot\nabla v\, dx = \int_{\Omega} f\, v\, dx + \int_{\partial\Omega_N} h\, v\, ds$$

$$\forall\ v$$

Elementmetode :

Svakformulering med innsatt konkrete valg for trial funksjonen u og test funksjonen v. :

$$u = \sum_{j=1}^{N} u_j N_j \qquad \text{og} \qquad v = N_i \quad i = 1, \dots N.$$

Basisfunksjonene $\{N_i\}$ blir brukt både ~~[illegible]~~ som trial og test funksjonen

$\Longrightarrow$ $N \times N$ system.

I noe mer detalj

Svak formulering

$$\int_\Omega (k\nabla u)\cdot\nabla v \, dx = \int_\Omega f\, v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} h\, v \, ds$$

innsatt $u = \sum_j u_j N_j$, $v = N_i$

$\Rightarrow$

$$\int_\Omega \Big(k\nabla\big(\sum_j u_j N_j\big)\Big)\cdot\nabla N_i \, dx = \int_\Omega f\, N_i \, dx + \int_{\partial\Omega_N} h\, N_i \, ds$$

Trekker summen ut :

$$\sum_j u_j \int k\,\nabla N_j\cdot\nabla N_i \, dx = \ldots$$

Vi får nå et linjært likningsystem:

$$Au = b$$

hvor

$$A_{ij} = \int k \nabla N_j \cdot \nabla N_i \, dx$$

$$b_i = \int_{\Omega} f N_i + \int_{\partial\Omega_N} h N_i \, dx$$

u er den ukjente vektoren $\{u_j\}$

Noen overordnede betraktninger
når det gjelder linjær algebra
vs PDE teori.

Velstilthet: Løsningen

1. eksisterer

2. er unik

3 er kontinuerlig avhengig
av input.

For eksempel gitt to input
data b_1 og b_2. Der fins to
løsninger u_1 og u_2

u_1 og u_2 er forskjellige gitt at b_1 og b_2 er forskjellige

Man har forskjellige begrensninger

Feks

$$\|u_1 - u_2\| = \|A^{-1}(b_1 - b_2)\| = \|A^{-1}\| \, \|b_1 - b_2\| \qquad (7)$$

I endeligdimensjonal setting er alle normer ekvivalente så man kan få mange forskjellige resultater ut av dette.

Ting er ikke like enkelt når det gjelder PDEer.

Man kan tenke seg en direkte analog av 1)
feks men L_∞ norm

$$\| u_1(x) - u_2(x) \| \leq \| (-\Delta)^{-1} \| \, \| f_1 - f_2 \|$$

Dette vil typisk ikke gjelde.

Av en eller annen grunn så er det mer naturlig å regne med noe som tilsvarer $A^{1/2}$. Altså i linjær algebra

$$Au = b$$

$$\Rightarrow A^{1/2} u = A^{-1/2} b$$

Vi legger merke til at

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla$$

så i en viss forstand er

$$\nabla = (\Delta)^{1/2}$$

Angående stabilitet for

$-\Delta u = f$ så

er det slik sett

$$\|\nabla u\| \sim \|(\nabla)^{-1} f\|$$

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\| \sim \|(\nabla)^{-1}(f_1 - f_2)\|$$

som gir den skarpeste forståelsen.