Forelesning 9, kapittel 9

Eksplisitte løsninger for elastiske stoff

Generelt er det få generelle løsninger av Navier's likning

$$\rho \vec{u}_{tt} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + f$$

Vi må se på spesialtilfeller for å utvikle intuisjon!

Generelt kan man løse disse likningene for vilkårlige problemer ved hjelp av numeriske metoder og datamaskin, men man bør ikke stole helt på det som regnes ut uten sine egne betraktninger

Spenningsfordeling i et tyngdefelt

Anta et elastisk lag med uendelig utstrekning evt en lukket overflate som jordskorpen.
Det viktige er at ingenting skjer i x- og y-retning pga uendelig lag betraktningen.

Vi vil ha pga Newton's 2 lov ~~at~~ ~~u_{tt}~~ og stasjonære betingelser ($\vec{u}_{tt} = 0$) at

$$\underbrace{P_{zz}}_{\text{indre spenning}} = \underbrace{-p_0 + \rho g z}_{\text{ytre krefter}}$$

Vi antar så at

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(z) \end{pmatrix} \qquad 1)$$

slike antagelser må gjøres hvis
man skal regne for hånd!!
Ellers kan vi bare gi opp.

Som direkte konsekvens av antagelse
1) får vi

$$\underset{\rightarrow}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u(z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Videre

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Frå Hooke's lov (7,13)

$$P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \vec{u} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Får vi

$$P_{xx} = \lambda \nabla \cdot \vec{u} = \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$P_{yy} = \lambda \nabla \cdot \vec{u} = \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Dessuten

$$P_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Altså, som direkte konsekvens av at $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(z) \end{pmatrix}$

– ingenting som skjer i x-y-retning så får vi spenninger i x- og y-retning.

$\Longrightarrow$ Ganske ~~konter~~ kontraintuitivt !!!

Normen bestemt

$$P_{xx} = P_{yy} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{zz}$$

I geologiske materialer har vi ofte at $\lambda \simeq \mu$

$$\Longrightarrow \quad P_{xx} = P_{yy} = \frac{1}{3} P_{zz}.$$

6)

Vi har altså

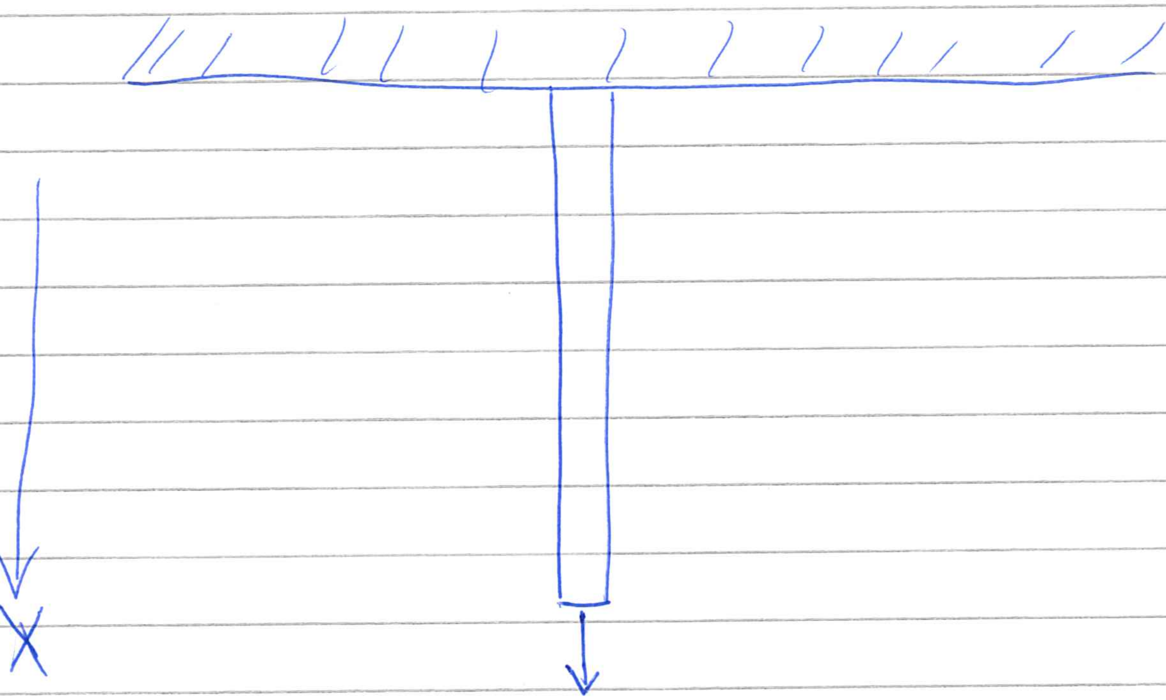
normalspenninger i ~~xyz~~

x-, y- og z-retning.

Og de er av samme størrelsesorden,

Tøyning i en sylindrisk stav

La oss nå se på hva som skjer i en stav.



Staven henger i lufta og vi tenker oss at vi kan ignorere lufttrykket (intuitivt riktig)

Vi har altså på ingen måte noe ∞ - lag.

Da må vi anta at spenningen er kontinuerlig med sine omgivelser

Hva medfører dette ?

Jo

$$P_{xx} = P$$

$$P_{yy} = P_{zz} = P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0$$

Gir dette mening ?

Videre må vi anta noe.

La $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ u_y(y) \\ u_z(z) \end{pmatrix}$

Videre siden deformasjonen skal være liten kan vi anta den som linjær.

$$u_x(x) = \varepsilon x$$

$$u_y(y) = \gamma y$$

$$u_z(z) = \gamma z.$$

Altså, forskyvningen i lengderetning er forskjellig fra tverrsnittretningene.

Direkte konsekvens

$$\nabla \cdot \vec{u} = \varepsilon + 2\gamma$$

$$\underset{\to}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & \gamma & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

Dermed $P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \vec{u}\, \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

$$\underset{\to}{P} = \begin{pmatrix} \lambda(\varepsilon + 2\gamma) + 2\mu\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\varepsilon + 2\gamma) + 2\mu\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\varepsilon + 2\gamma) + 2\mu\gamma \end{pmatrix}$$

Vi har allerede sagt

at $P_{yy} = P_{zz} = 0$

$\Rightarrow \lambda(3 + 2\gamma) + 2\mu\gamma = 0$

$$\Rightarrow \quad \gamma = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\,\varepsilon$$

Altså ved et strekk $\varepsilon > 0$

så ~~ka~~ minsker tverrsnittet $\gamma < 0$.

Faktoren $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ kalles

Poisson's ratio $\left(0 < \nu < \frac{1}{2} \right)$

Ved å sette

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$ ~~får vi~~

~~sett~~

inn i

$$P_{xx} = \lambda(\varepsilon + 2\gamma) + 2\mu\varepsilon$$

får vi (med litt regning

$$P_{xx} = \underbrace{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda+\mu}}_{E}\,\varepsilon.$$

E kalles Young's modul

E, ν er like ofte oppsitt som μ, λ og man kan gå frem og tilbake mellom disse.