Forelesning 8, kapittel 8

Vi er nå straks ferdig
med utledningen av disse likningene.
— kun sjarmøretappen igjen

Vi har kommet frem til
(kapittel 4, feks likning 4.1)

at Newton's 2. lov kan skrives

$$\rho \vec{a} = \underbrace{\nabla \cdot \vec{P}}_{\substack{\text{indre} \\ \text{krefter}}} + \underbrace{\rho \vec{f}^{v}}_{\substack{\text{ytre} \\ \text{(feks gravitasjon)}}}$$

$\vec{a}$ kan uttrykkes på to måter

1. $\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ ← typisk for elastiske materialer

2. $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$

Dessuten har vi følgende

<u>konstitutive lover</u> for

elastiske lover (likning 7.13)

1. $P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \vec{u}\, \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

og Newtonske fluider (7.14)

2. $P_{ij} = -p\,\delta_{ij} + K \nabla \cdot \vec{v}\, \delta_{ij}$

$$+ 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} \delta_{ij} \right)$$

Her er $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

og $\mathring{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

hvor $\vec{u}$ er forskyvning, $\vec{v}$ er hastighet, $\underset{\to}{\varepsilon}$ er tøyning og $\underset{\to}{\mathring{\varepsilon}}$ er tøyningsrate

La oss nå komme frem til Navier's likning for et elastisk, isotropt stoff (som vi begynte å snakke om på 1. forelesning)

$$P_{ij} = \lambda \, \nabla \cdot \vec{u} \, \delta_{ij} + 2\mu \, \varepsilon_{ij}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \nabla \cdot \vec{u} \, \delta_{ij}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu \varepsilon_{ij}\right)$$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla \cdot \vec{u}\right)\delta_{ij} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla \cdot \vec{u}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

bytte rekkefølge

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla \cdot \vec{u}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla \cdot \vec{u}\right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla \cdot \vec{u}\right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$= (\lambda + \mu)\nabla\left(\nabla \cdot \vec{u}\right) + \mu \underbrace{\nabla^2 \vec{u}}_{\Delta \vec{u}}$$

Dermed får vi

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f}$$

Tilsvarende Navier-Stokes likninger for et Newtonsk fluid.

$$P_{ij} = -p\,\delta_{ij} + K\,\nabla \cdot \vec{v}\,\delta_{ij} + 2\mu\left(\mathring{\varepsilon}_{ij} - \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3}\,\delta_{ij}\right)$$

Dermed

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij}\right) + K\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\cdot\vec{v})\delta_{ij}$$

$$+ 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\nabla\cdot\vec{v}}{3}\delta_{ij}\right)$$

på samme måte

$$\downarrow$$

$$=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(K + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\vec{v}) + \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Altså

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(K + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\vec{v})$$

$$+ \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

For inkompressible fluider ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$)

får vi

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

Grenseflatebetingelser (randbetingelser)

og initialbetingelser.

Dersom likningen vår inneholder

∇^2

så trenger vi randbetingelser i

hvert punkt på randen!

Ettersom vi har vektorvarianten av ∇^2, både i Navier's og Navier-Stokes likninger så trenger vi ~~en~~ randbetingelser i form av en vektor på randen.

Grunnen til dette vil vi ikke lære i dette kurset. Vi må bare huske det.

- Dersom likningen inneholder 1 tidsderivert, som for Navier-Stokes, altså $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ så trenger vi <u>en</u> initialbetingelse!

- Dersom likningen inneholder 2 tidsderivrte, som Navier's likning, altså $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ så trenger vi <u>to</u> initialbetingelser!

Stressbetingelse

$P_n = \underset{\rightarrow}{P} \cdot n$ er

to betingelser i 2D og

3 i 3D.

Altså tilstrekkelig!!

i 2D:

1. $P_{nn} = \vec{n} \circ P_n = \vec{n} \cdot \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n}$

2 $P_{nt} = \vec{n} \times P_n = \vec{t} \cdot \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n}$

i 3D har vi to tangentvektorer.

a) Fri overflate

typisk (2D)

$$P_{nt} = 0$$

$$P_{nn} = -p_0$$

b) Faste vegger

$$\vec{v} = 0$$

evt

$$\vec{u} = 0.$$

c) Skilleflate mellom to medier

1. Spenningen er kontinuerlig
2. Vakum oppstår ikke mellom to medier.