Forelesning 7, kapittel 7

Forbindelsen mellom <u>spenning</u>

og <u>tøyning / tøyningsrate.</u>

$$[\text{Spenning}] = \left[\frac{\text{kraft}}{\text{overflate}}\right] = \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$[\text{tøyning}] = [\nabla \vec{u}] = \left[\frac{1}{m} m\right] = [1]$$

relativt mål med andre ord.

~~Således kan~~

Man kan tenke seg at

spenningen er lik / proposjonal

med tøyningen. $\underset{\rightarrow}{P} = c\, \underset{\rightarrow}{\varepsilon}$

Vi skal se at det ikke er

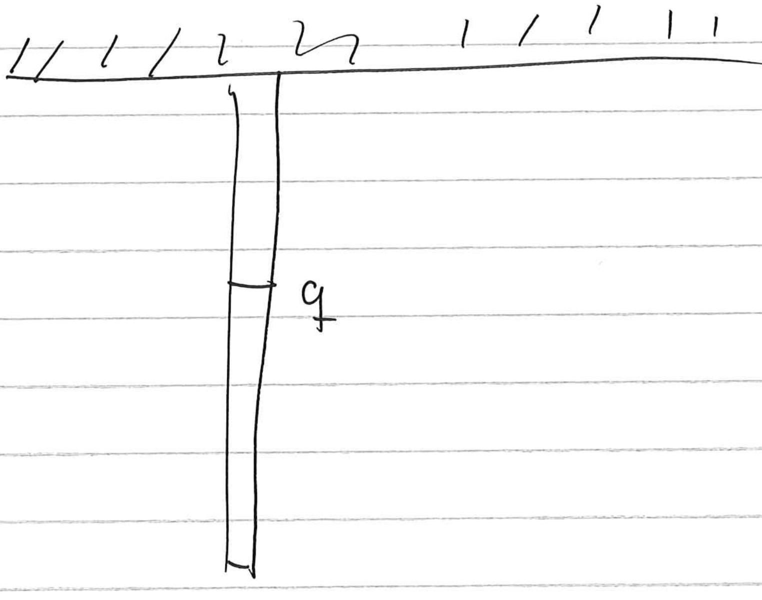
langt unna sannheten. Dog viktige forskjeller.

1D modeller.

Det er lett å teste i ~~hvilket~~ hvilken grad vi har

" $\underset{\rightarrow}{P} = C \underset{\rightarrow}{\varepsilon}$ " i 1D.

Vi tenker oss en eller flere staver, og vi drar i den med forskjellig styrke for å sjekke om tøyningen er proposjonal med kraften vi bruker.



Stavens lengde er l

og forlengelsen er Δl

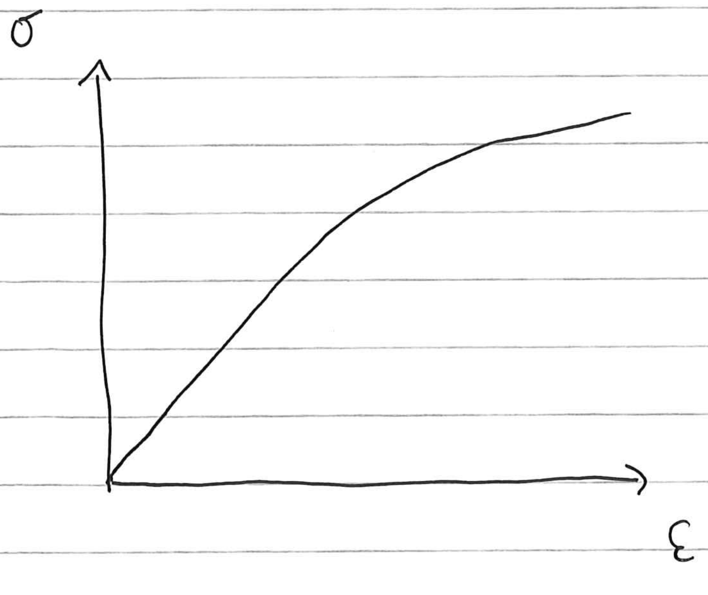
Tøyningen er da : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ← relativ størrelse.

Samtidig : Spenningen er

$$\sigma = \frac{F}{q}$$

En typisk tøyning - spennings relasjon

er

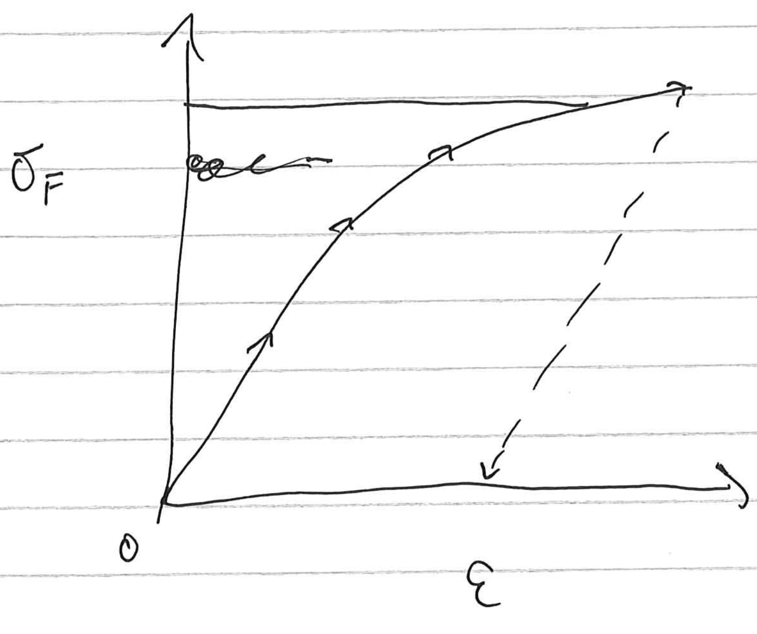


- starter i 0
- er linjær et godt stykke
- "slipper litt etterhvert"

Elastisk relasjon: Spretter tilbake til utgangsposisjon når kraften fjernes.

Alle materialer er slik at dersom de utsettes for sterke nok krefter vil det bli permanente forandringer.

Den kritiske spenningen for permanente forandringer kalles flytspenningen, yield stress



I 1D er naturligvis

$\sigma - \varepsilon$ relasjonen lett å måle

og den har blitt målt mangfoldige

ganger for forskjellige materialer.

<u>Eksempel</u>

Bein	15	GPa	
Stål	209	GPa	$10^9 \frac{N}{m^2}$
Granitt	46	GPa	
Gummi	1	MPa	
Hjertemuskel	~1	MPa	$10^6 \frac{N}{m^2}$
hjerne	~1	kPa	$10^3 \frac{N}{m^2}$
gele	1	kPa	

1D forskjellige modeller

Linjeert elastisk: $\sigma = E\varepsilon$

Newtonsk væske $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$

Isbreer $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}^{1/3}$

(perfekt) Plastisk stoff $\sigma = E\varepsilon \quad \sigma \leq \sigma_F$

$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \quad \sigma > \sigma_F$

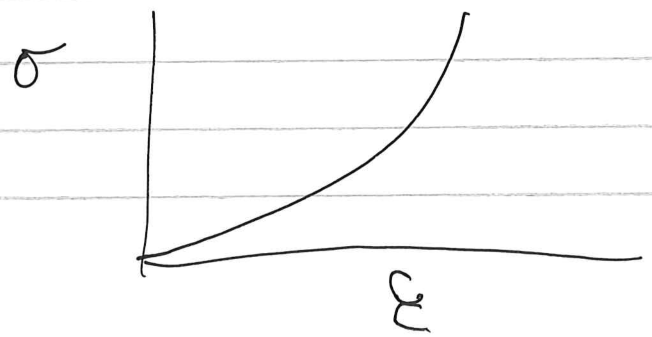
Kelvin-Vogt modell

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

Maxwell:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Fung's lov
(hjerte/blod årer) $\sigma = \mu \exp(\varepsilon)$



Når vi skal gå fra 1D til 3D så møter vi et problem

Vi ønsker $\vec{P} = f(\vec{\varepsilon})$

Enkleste antagelse da er

$$P_{ij} = K_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}$$

81 parametere som må bestemmes.

Naturligvis er det endel symmetri som gjør at mange av disse forsvinner. Dessuten, dersom man kan anta at materialet er isotropt så ender man opp med $\underline{2}$ parametere.

linjært elastisk isotropt materiale

$$P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \vec{u}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Newtonsk væske

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + K \nabla \cdot \vec{v}\, \delta_{ij} + 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3}\delta_{ij}\right)$$

Newtonsk inkompressibel væske

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\, \dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Innledningsvis

så skrev jeg opp ~~en~~

vanlig former for Navier-Stokes

og Navier

<u>N-S : for inkompressibel væske</u>

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

hvor $\Delta\vec{v} = \nabla\cdot\nabla\vec{v} = \nabla^2\vec{v}$

1. $\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right)$ er $\rho\vec{a}$

2. $\nabla\cdot\underset{\rightarrow}{P} = \cancel{\rho a} - \nabla p + \nabla\cdot(2\mu\dot{\varepsilon})$ anta μ konstant.

hvordan kan dette bli

$= -\nabla p \cancel{+ \ldots} \mu\nabla^2\vec{v}$?

Tilsvarende for

Navier's likning som ofte skrives

$$\rho \vec{u}_{tt} = \mu \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{\varepsilon} + (\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \vec{f}$$

Men direkte fra Navier's likning

ender vi opp med

$$\rho \vec{u}_{tt} = \mu \nabla \cdot \varepsilon + \lambda \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \vec{f} .$$

I begge tilfeller har vi

$$\nabla \cdot \varepsilon = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) \right)$$