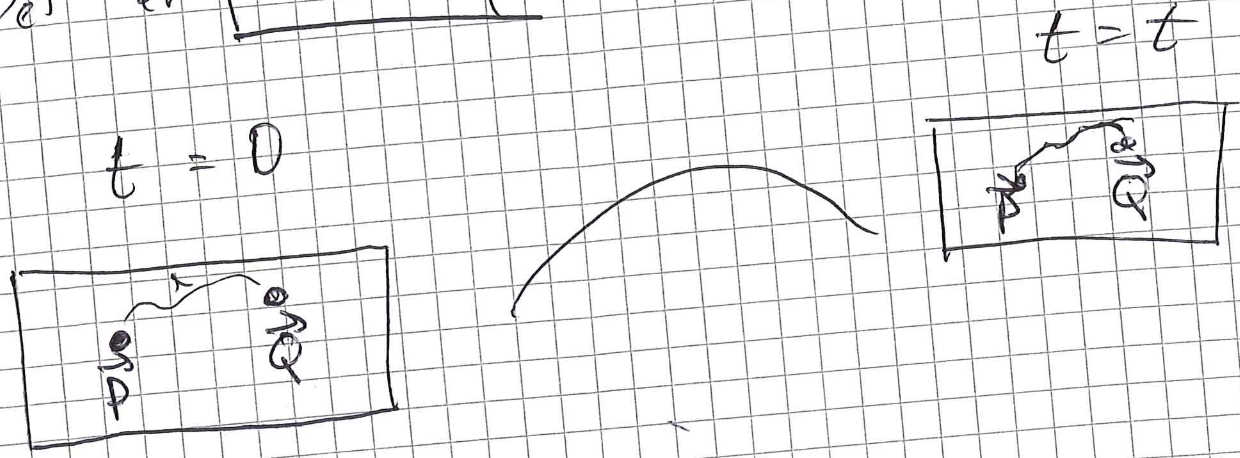
Forelesning 6, kapittel 6

Deformasjoner / tøyninger i 3D

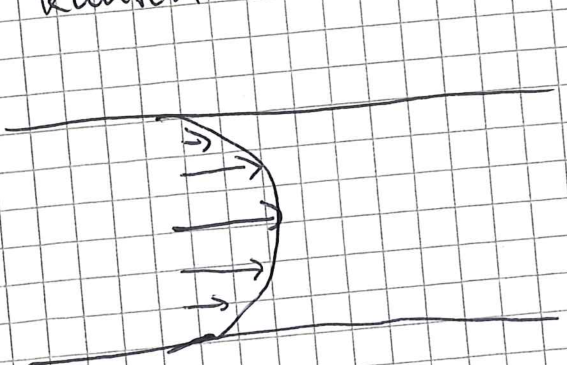
Deformasjoner:

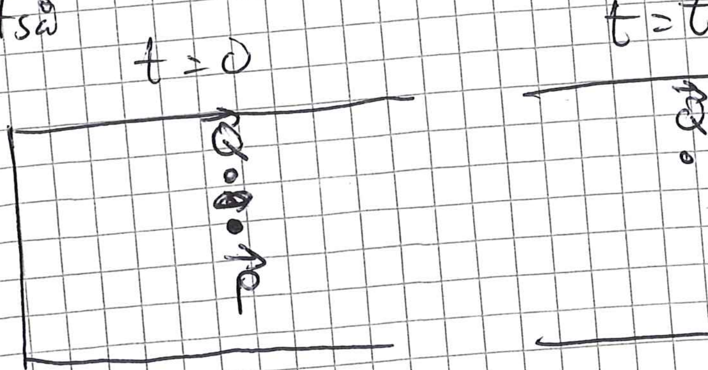
Det er $\boxed{\text{relative}}$ hastighet/forskyvnings $\boxed{\text{forskjeller}}$



F.eks i en blodåre renner det fortest i midten, sakten mot kanten

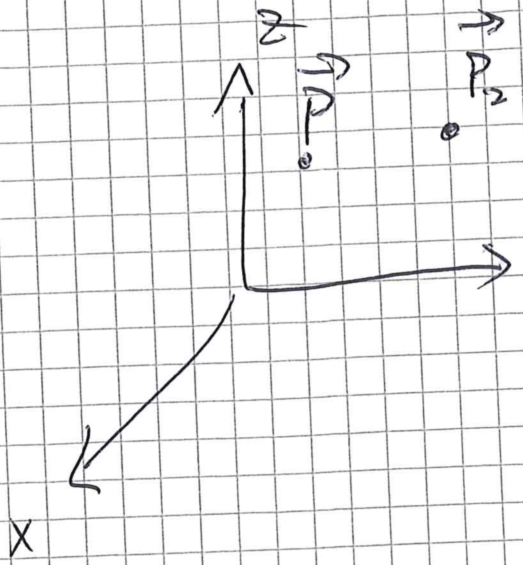
Altså





Dersom $\vec{P}$ beveger seg mer enn $\vec{Q}$ og de er naboer må det nesten bety at $\vec{P}$ er utsatt for større krefter ~~Q moment~~ eller har høyere moment enn $\vec{Q}$.

Dersom $\vec{Q}$ er tilstrekkelig nære $\vec{P}$ vil $\vec{Q}$ bremse $\vec{P}$ og i den prosessen få større moment.



$$\vec{P}_1 = \{x_j\}$$

$$\vec{P}_2 = \{x_j + \Delta x_j\}$$

Felthastighet $\vec{v} = \{v_i\}$

Forskyvning $\vec{u} = \{u_i\}$

Forskjell i hastighet mellom $\vec{P}_1$ og $\vec{P}_2$ er

$$\Delta v_i = v_i(x_j + \Delta x_j, t) - v_i(x_j, t)$$

$$\Delta u_i = u_i(x_j + \Delta x_j, t) - u_i(x_j, t)$$

Δ Legg merke til notasjonen Δ

Vi tilnærmer:

$$\Delta v_i \simeq \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta x_j$$

$$\Delta u_i \simeq \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j$$

Hvor vi har kuttet høyere-ordensledd.

Vi skriver

$$\overset{\circ}{D} = \nabla v = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

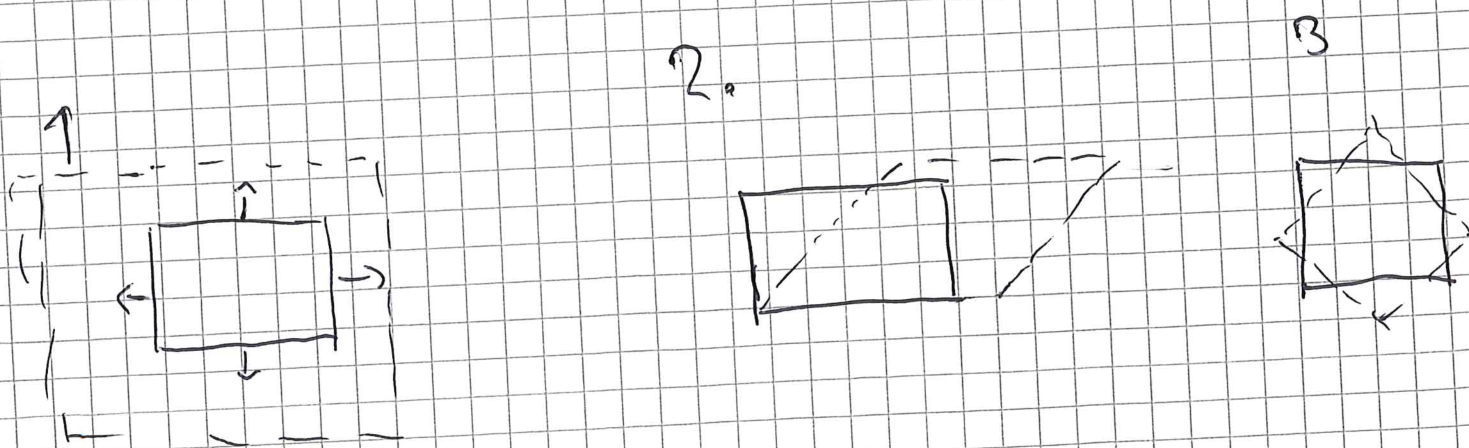
$$D = \nabla u = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots \\ - & & - \; - \end{pmatrix}$$

3 tilfeller med forskjellig fysisk betydning:

1. Ekspansjon/kontraksjon uten form endring

2. Deformasjon uten ~~form~~ volumforandring

3. Stiv bevegelse (rotasjon/translasjon)



Intuitivt vet vi at disse tre tingene er forskjellige og at forskjellige materialer reager forskjellig.

La oss derfor prøve å skrive

$$\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{D}_e + \overset{\circ}{D}_d + \overset{\circ}{D}_r$$

ekspansjon deformasjon stivt bevegelse

Ren ekspansjon:

$$v_i = \alpha x_i + c_i$$

↑ origo for ekspansjonen.

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 3\alpha .$$

$$\Delta v_i \approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta x_j = \begin{Bmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} & & \\ & \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} & \\ & & \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_j \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} \delta_{ij} \Delta x_j$$

$$\dot{\mathbb{D}}_e = \left\{ \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} \delta_{ij} \right\}$$

Stive bevegelser

2D: $$\begin{pmatrix} a - cy \\ b + cx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \underset{\rightarrow}{C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hvor $$\underset{\rightarrow}{C} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$\underset{\rightarrow}{C}$ er skjevsymmetrisk

$$\underset{\rightarrow}{C} = -\underset{\rightarrow}{C}^T$$

3D: $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \underset{\rightarrow}{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \vec{\vec{C}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

hvor $\underset{\rightarrow}{C}$ er skjev symmetrisk

$$\underset{\rightarrow}{C} = \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{C}} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$$

Innfører så litt mer fysikk:

$\vec{\Omega}$ er vinkelhastighetsvektoren

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{V} = \vec{\Omega} \times \Delta \vec{x}$$

$$\Delta \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\Omega_y \Delta z - \Omega_z \Delta y)\, i \\ -(\Omega_x \Delta z - \Omega_z \Delta x)\, j \\ (\Omega_x \Delta y - \Omega_y \Delta x)\, k \end{pmatrix}$$

eller

$$\Delta \vec{V} = \begin{Bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix}$$

Tensoren kan deles i en symetrisk og en skjev-symmetrisk del

$$\mathring{D} = \nabla V = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\}$$

Den symmetriske delen vil vi bruke mye i kaller den $\mathring{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \mathring{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\}$$

Vi har at

$$\left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \right\} = \mathring{D}_e + \mathring{D}_d$$

Vi har dessuten at

$\varepsilon(\vec{r}) = 0$ dersom $\vec{r}$

$\rightarrow$ er en stiv bevegelse.

$$\boxed{\text{Sjekk}}$$

Vi har nå gått gjennom en dekomponering av hastighetsgradienten $\nabla \vec{v}$ som er en tensor, $\underset{\to}{\mathring{D}}$

Tilsvarende kan gjøres med $\nabla \vec{u}$ som kalles $\underset{\to}{D}$

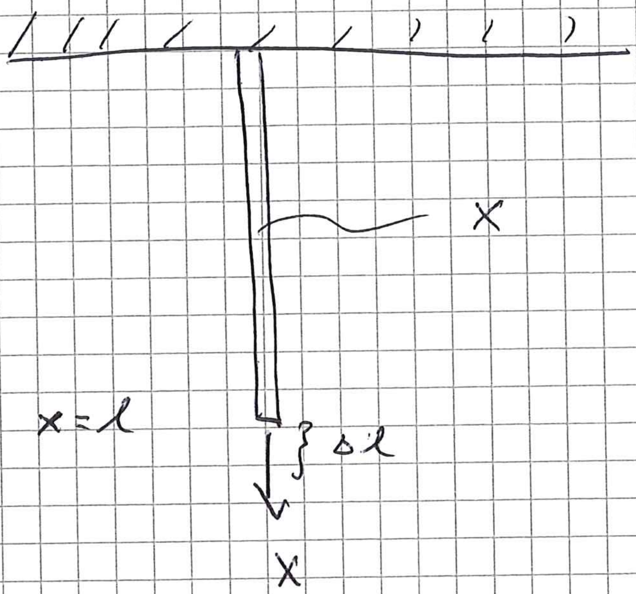
Altså

$$\underset{\to}{D} = \underset{\to}{D_e} + \underset{\to}{D_d} + \underset{\to}{D_r}$$

tøyningstensoren

Eksempler:

Strekking av stav



Etter strekningen vil ~~...~~

$$x(t) = x(0) + \Delta x \quad , \Delta x = \frac{\Delta l}{l} x$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\Delta l}{l} x$$

Forskyvningen er størst ved $x = l$.

Er kreftene størst der?

Nei

Tøyningstensoren

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta l}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

hvor vi her ignorert faktum

at staven antagelig har blitt

litt tynnere

2. Skjærdeformasjoner

forskyvningen i x-retning er linjær i y

$u = \alpha y$

Dersom det ikke er forskyvninger i andre retninger blir

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$