Forelesning 5

Eksempel 4.2

Vi betrakter et elastisk plan med uendelig utstrekning i x-y planet.
I z-retningen virker gravitasjon og planet har tetthet ρ.
Vi regner med at det kan betraktes stasjonært.

Likningen blir

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right) = g$$

2)

Vi regner med at det ikke er variasjoner i x-y retning da det er et uendelig plan — ellers måtte vi inkludere randeffekter.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P_{zz}}{\partial z} = g$$

Altså

$$P_{zz} = \rho g z + A$$

constant som må bestemmes

Antar så at

$$P_{zz} = -p_0 \quad \text{for} \quad z = 0$$

Vi ender opp med

$$P_{zz} = -p_0 + \rho g z .$$

Øvrige spenningskomponenter

P_{xx}, P_{xy}, P_{xz} osv er

ubestemte.

Uansett spenningen i et

elastisk stoff utsatt for

tyngdekraft er altså

likt som trykket i et væske

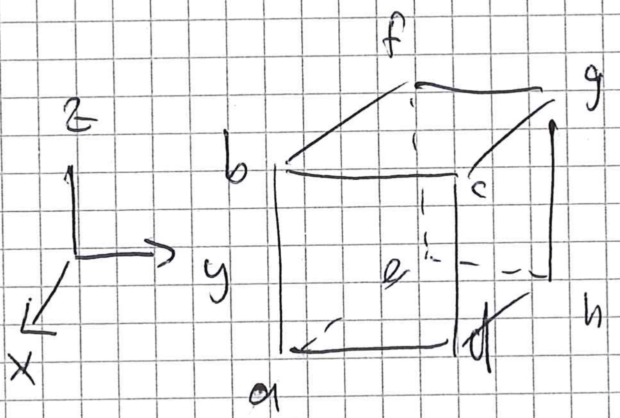
i et tyngdefelt.

Vi kommer tilbake til eksempelet senere.

Kontinuitetslikningen

"Masse kan hverken oppstå eller forsvinne".

Igjen betrakter vi en boks



Massestrøm "flux" $\vec{q} = \rho \vec{v}$

hvor $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

Massestrøm i x-retning

$$q_x = \rho u$$

Vi bruker Taylor som tidligere

$\vec{q}\cdot\vec{n}$ ut gjennom abdc er

$$(\rho u)_0 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y \Delta z$$

og ut gjennom

cfgh $(\rho u)_0 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\frac{\Delta x}{2}) \quad \Delta y \Delta z$

Netto innstrøm av masse ~~per~~ i løpet av Δt

blir differansen

$$\Longrightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\, \Delta z\, \Delta t$$

Legg merke til at

minustegnet kommer av

at vi regner ut

hvor mye mer som

kommer inn ikke ut.

Tilsvarende med y- og z-retningen.

$$\Rightarrow \; -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\,\Delta\tau\,\Delta t$$

og

$$\Rightarrow \; -\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\,\Delta\tau\,\Delta t$$

i tidsrommet $\Delta\tau$

Økningen i masse ~~perenit~~

er dessuten

$$\Delta\rho\,\Delta\tau$$

Stemmer enheter her ?

$$\left[\Delta\rho \, \Delta\tau\right] = \frac{kg}{m^3} \cdot m^3 = kg$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\, \Delta\tau \, \Delta t\right] = \frac{1}{m} \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} m^3 \, s$$

$$= kg \qquad \boxed{ok}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Delta\rho \, \Delta\tau}{\Delta\tau \, \Delta t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] \frac{\Delta\tau \, \Delta t}{\Delta\tau \, \Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Altså

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

Eller

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

Viktig tilfelle ~~er~~

inkompressible materialer

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow$ kontinuitetslikningen

blir

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

eller

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

dersom ρ er konstant.

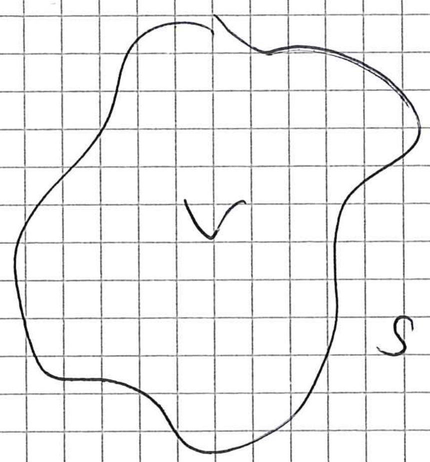
4.4 Integralformulering

[dvs forrige gang]

Vi har nå nærmest implisitt bevist Gauss sin integrasjonsats for tensorer.

Altså:

$$\int_S \underset{\Rightarrow}{P} \cdot \vec{n}\, d\sigma_n = \int_V \nabla \cdot \underset{\Rightarrow}{P}\, d\tau$$



Tilsvarende

Volumkrefter:

$$\int_V \vec{f}^{\,v}\, d\tau$$

og akselrasjon

$$\int_V \rho \vec{a}\, d\tau$$

Newton's 2 lov blir

dermed (innenfor volumet V)

$$\int_V \rho \vec{a}\, d\tau = \int_V \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}\, d\tau + \int_V \vec{f}^{\,v}\, d\tau$$

Tilsvarende for kontinuitetsligningen

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v})\, d\tau$$

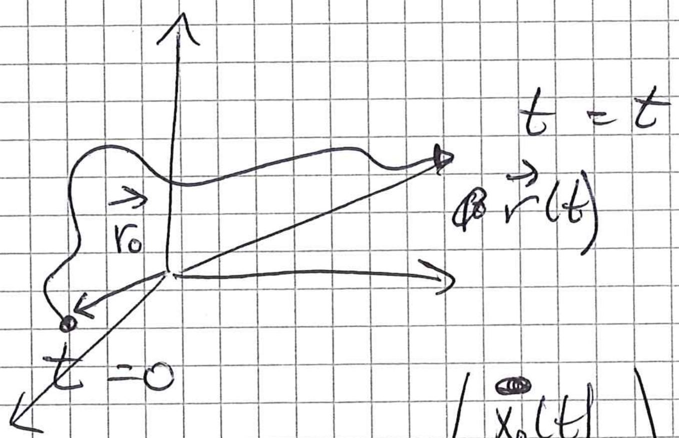
Kapittel 5

Hastighet, forskyvning og akselrasjon

La oss se på en

partikkel som vi

merker ~~P~~ med merkelapp P



$$\vec{r}_P(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix}$$

Partikkelen beveger seg med en

hastighet

$$\frac{d r_p(t)}{dt} = \vec{v}(\vec{r}_p, t)$$

Jeg kan uttrykke en sammenheng mellom

$\vec{r}_p(t)$ og $v(\vec{r}_p, t)$

som

$$r_p(t) - r_p(0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\vec{r}_p, t)\, dt$$

Forskyvning $\vec{u}$ er definert som forflytningen til partikkelen fra tid 0 til tid t,

altså

$$\vec{u}(p) = \vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(0)$$

Vi legger merke til at forskyvningen er definert partikkelvis

Vi har per definisjon

at

$$\vec{u}_p(t) = \vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(0) = \int_0^t \vec{v}(r_p, t)\, dt$$

Ved små deformasjoner

$$\vec{v}(\vec{r}_p, t) = v(\vec{r}_p^{\,0} + \vec{u}, t) \approx v(r_p^0, t)$$

og $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{v}$

Det er mer komplisert ved

større deformasjoner, men vi

ser ikke mye på det i

dette kurset.

Akselrasjon

Vi har som nevnt

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u(\vec{x},t) \\ v(\vec{x},t) \\ w(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

Akselrasjon blir dermed, ved bruk av kjerneregel:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{x},t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + v_j\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ kalles ofte

material deriverte

Vi skriver gjerne

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u$$

Legg også merke til skrivemåte

$$\vec{v} \cdot \nabla$$

Hvis $\vec{v} = (u, v, w)$ og $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

så blir altså

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = \underbrace{u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}}_{\text{en skalar operator}}.$$