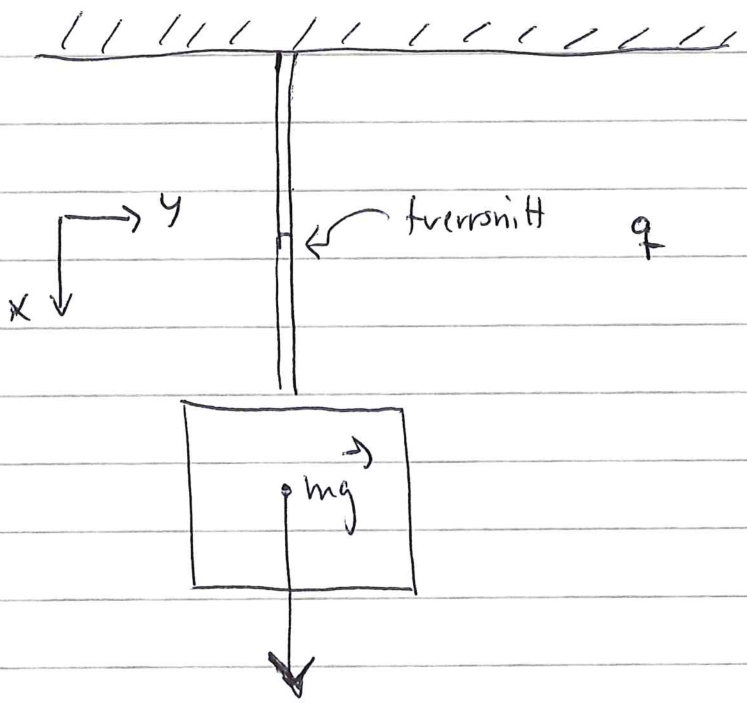
Forelesning 4

Eksempel 2.3

Spenning i tynn stav.

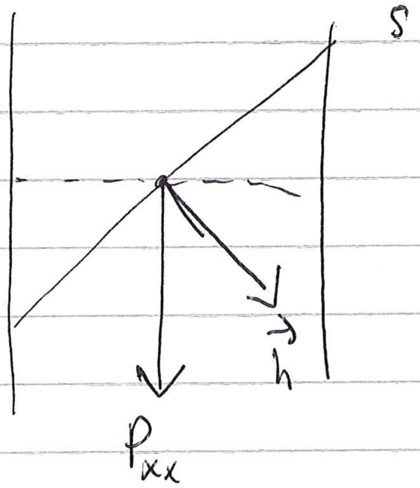


Spenningen er $\frac{\text{kraft}}{\text{flate}} = \frac{mg}{q}$

Mange materialer har oppgitt hvor stor spenning de tåler : yield stress

flytegrense

Vi kan også regne ut stresset i forhold til en flate. La oss zoome inn



$$\vec{n} = \{\cos\phi, \sin\phi\}$$

$$\vec{P}_n = \{\cos\phi \, P_{xx}, 0, 0\}$$

Normalspenningen på snittflaten er

$$P_{nn} = \vec{P}_n \cdot \vec{n} = P_{xx} \cos^2\phi$$

Skjærspenningen er

$$P_{nt} = |\vec{P}_n \times \vec{n}| =$$

3)

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\varphi\, P_{xx} & 0 & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\varphi \sin\varphi\, P_{xx}$$

$$= \frac{1}{2} P_{xx} \sin 2\varphi$$

$$\boxed{\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi}$$

Ved å kikke nærmere på dette ser vi at maximal skjærspenning opptrer på flater 45° på lengderetning.

Kommentar: i eksempelet er det en kraft (tyngdekraften) i x-retning som balanseres ~~av~~ av spenningen.

~~Er dette~~

Er det riktig at det
kun virker krefter i x-retning ?
Hvorfor observerer vi da typisk
at staven blir tynnere i bredde
retning og lengre i lengde retning ?

Kapittel 3 i Prinsipalspenninger og prinsipal retninger

Det viser seg at det alltid er mulig å orienter flatene slik at det kun opptrer normalspenninger

Fra linjær algebra vet vi at symmetriske matriser har reelle egenverdier og orthogonale egenvektorer

i våre tilfeller

Tensorer er familier av matrinser (3x3) som oppfyller spesielle transformasjonsegenskaper

Spenningstensoren er symmetrisk.

Prinsipalspenninger / retninger er

bare egenverdi / egenvektorer av

spenningstensoren !

Vi har

$$\vec{P}_n = \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n}$$

Dersom spenningen skal være rettet

langs $\vec{n}$ må

$$\vec{P}_n = \sigma \vec{n}$$

hvor σ er en skalar

Altså

$$\underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n} = \sigma \vec{n}$$

~~7b~~

Den har allerede svart belte i å løse slike systemer så jeg hopper over utledningen.

Kommentar: I 2D kan det løses med ~~eksp~~ eksplisitte formler. I 3D må man ofte til med datamaskin siden generelle formler ikke fins. Altså det fins ingen generell formel for løsning av 3 gradslikning.

Kapittel 4

Bevegelseslikningen i primitiv form + Kontinuitetslikningen

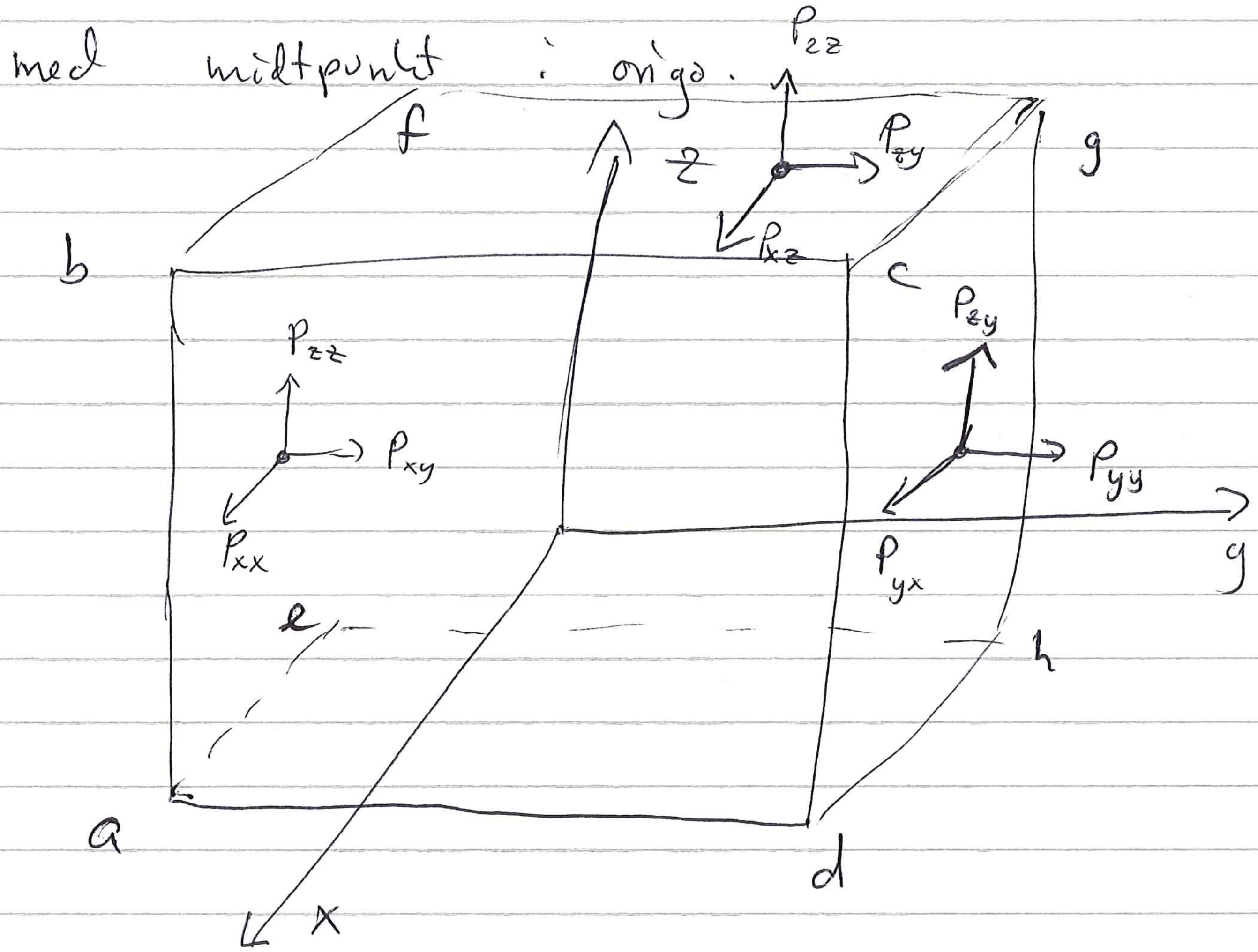
Bevegelseslikningen: $\vec{F} = m\vec{a}$

Kontinuitetslikning: Materie kan verken oppstå eller forsvinne.

→ Nå skal altså dette uttrykkes presist slik at vi får en eller flere likninger for hvert punkt i universet.

a)

Vi begynner med en boks med midtpunkt i origo.



Kreftene som virker i x-retningen er P_{xx}, P_{yx}, P_{zx}

Vi tenker at disse er representert på midtpunktene av hver flate.

I sentrum

har vi komponentene

$(P_{xx})_0 \quad , (P_{yx})_0 \quad , (P_{zx})_0$

og ved hjelp av Taylor utvikling

så skriver jeg opp kraften på

alle sidene

På side abcd $\quad + \left[(P_{xx})_0 + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \underbrace{\Delta y \Delta z}$ flaten

↑ lengde fra origo

normal i motsatt retn.

ehgf $\quad - \left[(P_{xx})_0 - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z$

steg i motsatt retning.

cdhg $\quad + \left[(P_{yx})_0 + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \Delta z$

abfe $\quad - \left[(P_{yx})_0 - \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \Delta z$

bcgf $\quad + \left[(P_{zx})_0 + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right] \Delta x \Delta y$

adhe $\quad - \left[(P_{zx})_0 - \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right] \Delta x \Delta y$

Legger sammen alt :

observerer at $-$ ganger $-$ $= +$

og $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\Longrightarrow$

$$F_x = \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) \Delta \tau$$

hvor $\Delta \tau = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$

Tilsvarende kan gjøres i y- og z-retning.

$$F_y = \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right) \Delta \tau$$

$$F_z = \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) \Delta \tau$$

Mao

$$\vec{F} = \{F_i\} = \left\{ \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} \right\} \Delta\tau = \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} \Delta\tau$$

Videre, massen til boksen er

$$m = \rho \Delta\tau$$

Når det gjelder krefter så

har vi to typer i

volum krefter $\vec{f}^{v}$ (gravitasjon osv)

overflatkrefter $\vec{f}^{s} = \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}$

eller

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}$$

Newton's 2 lov

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

hvor vi typisk snakker

om spenningskraft per masseenhet

altså $\frac{\vec{F}}{m}$

$$\vec{a} = \vec{f}^s + \vec{f}^v$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} + \vec{f}^v$$

Nå har vi kommet et godt

stykke! Dette er dypt!