Forelesning 3, kapittel 2 7)

Tidspunkt for forelesning mandag
12 - 14 evt flytte fluidkurset ?

Vi har kommet frem til

$$\vec{P}_{-n} = -\vec{P}_n$$

Vi gjør nå uttrykkene veldig konkrete

$\vec{P}_x$ er spenningen på en flate
normalt til x-aksen

normalspenning

3 - komponenter $\vec{P}_x = \begin{bmatrix} P_{xx} \\ P_{xy} \\ P_{xz} \end{bmatrix}$ skjærspenning.

Tilsvarende

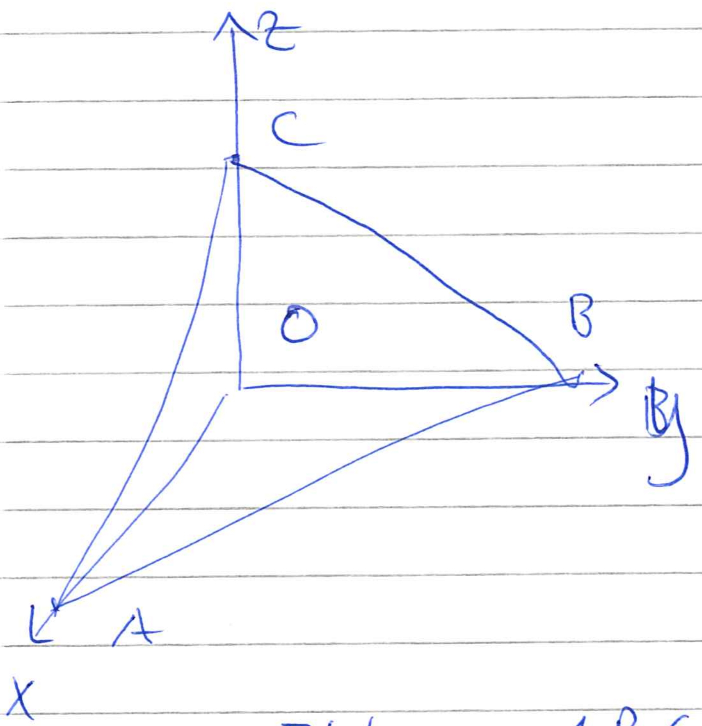
$$\vec{P}_y = \begin{bmatrix} P_{yx} \\ P_{yy} \\ P_{yz} \end{bmatrix}, \quad \vec{P}_z = \begin{bmatrix} P_{zx} \\ P_{zy} \\ P_{zz} \end{bmatrix}$$

Vi kan ordne dette som

$$\underset{\rightarrow}{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix}$$

Ved hjelp av Cauchy's spenningsrelasjoner får vi konkrete uttrykk for komponentene i spenningstensoren.

La oss se på et tetraheder



- Flaten ABC kaller vi $d\sigma_n$
- Flaten OCB kaller vi $d\sigma_x$
- Flaten OAC er $d\sigma_y$
- Flaten AOB er $d\sigma_z$

Det er åpenbart da at

AOC er projeksjonen av

ABC inn på xz-planet, $y = 0$.

Tilsvarende med OCB, AOB.

Vi skriver

$$d\sigma_x = n_x \, d\sigma_n$$

$$d\sigma_y = n_y \, d\sigma_n$$

$$d\sigma_z = n_z \, d\sigma_n$$

n_x, n_y, n_z er komponentene av enhetsnormalen.

Feks

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\Rightarrow n_x = n_y = n_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Legg merke til at dette er intuitivt riktig, men litt vanskelig å formulere

Videre har vi at

$$\vec{P}_{-x} = -\vec{P}_x$$
$$\vec{P}_{-y} = -\vec{P}_y$$
$$\vec{P}_{-z} = -P_z$$

Den totale kraften på tetrahederet er som følger

$$\vec{F} = \vec{P}_n \, d\sigma_n + \vec{P}_{-x} \, d\sigma_x + \vec{P}_{-y} \, d\sigma_y + \vec{P}_{-z} \, d\sigma_z$$

[Det er $\underline{\vec{P}_{-x}}$, $\underline{\vec{P}_{-y}}$, $\vec{P}_{-z}$ pga

måten vi tegnet tetrahederet inn

i koordinatsystemet {

FlakNormalen peker i negativ retning]

$\Longrightarrow$

$$\vec{F} = \vec{P}_n \, d\sigma_n - \vec{P}_x \, d\sigma_x - \vec{P}_y \, d\sigma_y - \vec{P}_z \, d\sigma_z$$

$$= \vec{P}_n - n_x \vec{P}_x - n_y \vec{P}_y - n_z \vec{P}_z \big) \, d\sigma_n$$

Tetrahederets volum : $V = \frac{1}{3} h \, d\sigma_n$

Tetrahederets masse : $M = \frac{1}{3} \rho h \, d\sigma_n$

Kraft per masseenhet

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\left(\vec{P}_n - n_x \vec{P}_x - n_y \vec{P}_y - n_z \vec{P}_z\right) \cancel{d\sigma_n}}{\frac{1}{3} \rho h \cancel{d\sigma_n}}$$

For at

$\vec{a}$ ikke skal gå mot

uendelig når h går mot

0 må

$$P_n \xrightarrow[h\to 0]{} n_x \vec{P}_x + n_y \vec{P}_y + n_z \vec{P}_z$$

På komponent form

$$P_{nx} = n_x P_{xx} + n_y P_{yx} + n_z P_{zx}$$

$$P_{ny} = n_x P_{xy} + n_y P_{yy} + n_z P_{zy}$$

$$P_{nz} = n_x P_{xz} + n_y P_{yz} + n_z P_{zz}$$

eller

$$\vec{P}_n = \vec{n} \cdot \underset{\rightarrow}{P}$$

Vi har altså ~~Komp~~

kommet frem til et uttrykk for

spenningstensoren.

Dette er selvfølgelig litt

baklengs ettersom vi ikke visste

at vi lette etter den.

Vansett så har vi kommet

frem til at vi kan holde

oversikt over alle kreftene

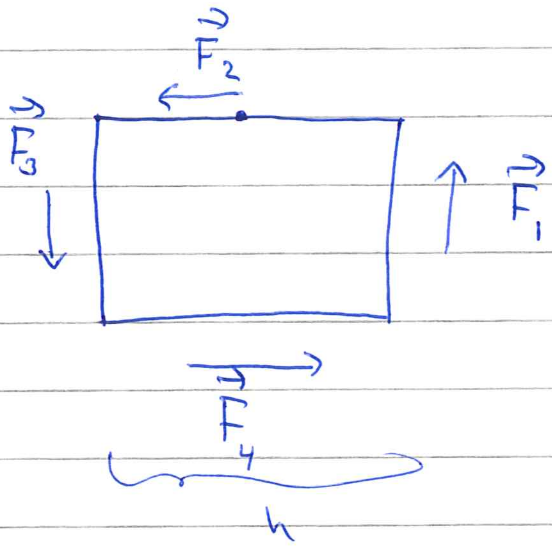
(virtuell)

i en boks eller tetraheder

med en spenningstensor !!

Det er en ting vi ikke

har fått med oss : rotasjon.



Intuitivt får vi trøbbel her

dersom $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \neq 0$

og $h \to 0$.

Dreiemoment, kjapt

Bevegelsesmengde

$\vec{p} = m\vec{v}$

Newton's 2 lov

$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F}$

Dreiemoment

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$ $\dot{\Omega}$

Torsjon

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$\vec{L}$ dreiemoment

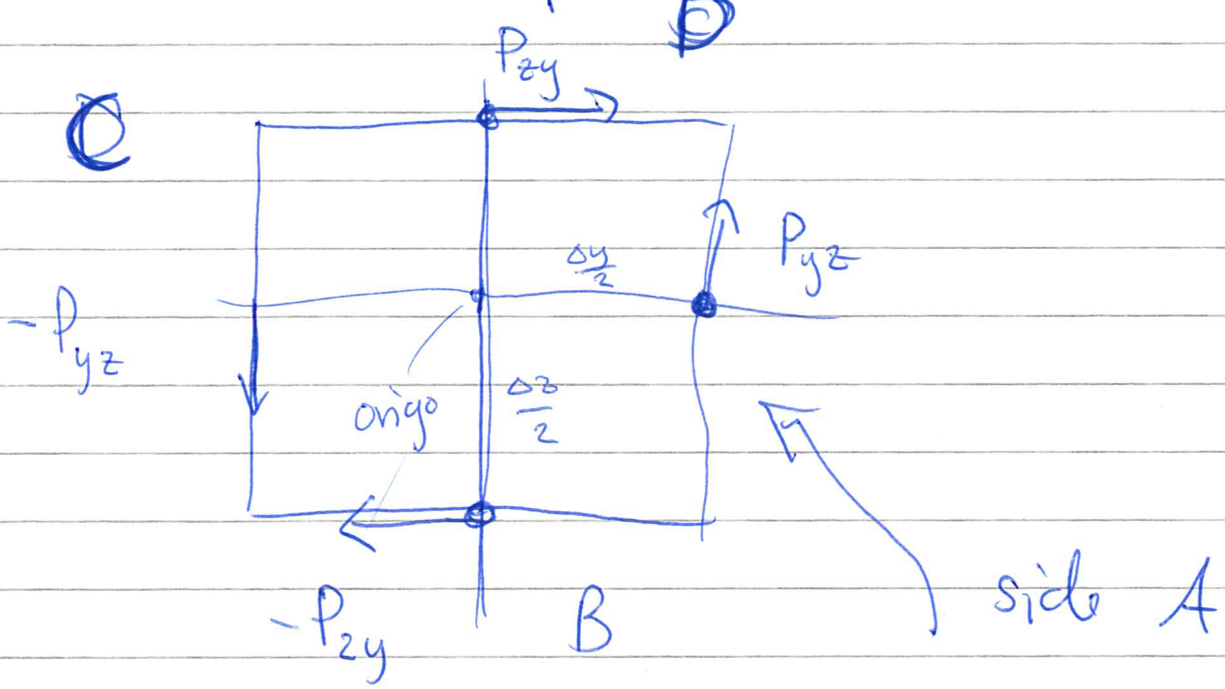
$\vec{\omega}$ vinkelhastighet

$\vec{\tau}$ torsjon.

I treghetsmoment

Legg merke til at totalkraft kan være null, men allikevel inneholde dreiemoment.

Dreiemoment mhp x-aksen



~~Vinkelakselerasjon~~

Dreiemoment (kraft x arm)

$$\cancel{M_x = (-P_{zy} - P_{yz})}$$

~~hvis man bruker M_x~~

Dreiemoment (kraft x arm)

Side A:

arm : $\frac{\Delta y}{2}$

kraft : $P_{yz} \cdot \underbrace{\Delta z \Delta x}_{\text{overflate}}$

Kraften på side A og C

blir dermed

$$\frac{\Delta y}{2} \times \left(P_{yz} \, \Delta z \Delta x \right)$$

$$+ \; -\frac{\Delta y}{2} \times \left(-P_{yz} \, \Delta z \Delta x \right)$$

Totalt dreiemoment på

A, B, C, D

$$M_x = (P_{zy} - P_{yz})\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$I_x = mr^2 \approx \rho\,\Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2$$

Vinkelakselerasjonen:

$$\dot{\Omega}_x = \frac{M_x}{I_x} = \frac{P_{zy} - P_{yz}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}$$

Altså $\dot{\Omega}_x \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \infty$ dersom

ikke $P_{zy} \to P_{yz}$.

Følgelig bør spenningstensoren være symmetrisk for at ikke uendelig rotasjoner skal dukke opp av intet.