Mek2200 Forelesning 2 1)

~~Notation:~~

Notasjon : Kapittel 1

En vektor $\vec{A} = A_1 \vec{i}_1 + A_2 \vec{i}_2 + A_3 \vec{i}_3$

~~Skalarprodukt~~

~~$\vec{A} \cdot \vec{B} =$~~

Einstein's summekonvensjon :

Repeterte indekser impliserer summering

Feks $\vec{A} = A_i \vec{i}_i = \sum A_i \vec{i}_i$

repeterte indekser

Skalarprodukt mellom to vektorer

$\vec{A} = A_i \vec{i}_i$ og $\vec{B} = B_j \vec{i}_j$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \vec{i}_i \cdot B_j \vec{i}_j = A_i B_j \vec{i}_i \cdot \vec{i}_j$

Dessuten $\vec{i}_i \circ \vec{i}_j = \begin{cases} 0 & \text{når } i \neq j \\ 1 & \text{når } i = j \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\vec{A} \circ \vec{B} = A_i \vec{i}_i \circ B_i \vec{i}_j = A_i B_j \, \vec{i}_i \circ \vec{i}_j$$
$$= A_i B_j \delta_{ij}$$
$$= A_i B_i$$

Gradienten til et skalar felt β

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \vec{i}_i$$

Divergensen

$$\nabla \circ \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

Vi kan skrive

∇ som en vektor operator

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i$$

På denne måten gir

$\nabla \cdot \vec{A}$ mening som

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \right) \cdot \left(A_j \vec{i}_j \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A_j \, \vec{i}_i \cdot \vec{i}_j = \frac{\partial}{\partial x_i} A_j \, \delta_{ij}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$$

(Rank 2)

Tensorer er som nevnt matriser som oppfyller visse transformasjonsegenskaper (kommer litt tilbake til det)

På vanlig vis har vi multiplikasjon med vektor:

Premultiplikasjon:

$$\vec{A} \circ \underset{\rightarrow}{P} = A_i \circ P_{ij}$$

Postmultiplikasjon

$$\underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{A} = P_{ij} A_j$$

Vi kommer senere frem til at en rekke tensorer med fysisk betydning er symmetriske, dvs

$$\vec{A} \cdot \underset{\rightarrow}{P} = \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{A}$$

Matrisemultiplikasjon

$$\underset{\rightarrow}{A} : \underset{\rightarrow}{B} = A_{ij} B_{ij} = \beta$$

en skalar.

Dyadenotasjon brukes ofte til å holde styr på tensorer.

En (2-rank) tensor skrives

$$\underset{\rightarrow}{P} = P_{ij} \vec{i}_i \vec{i}_j$$

Postmultiplikasjon blir da (med en vektor $A_k \vec{i}_k$)

$$\underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{A} = P_{ij} \vec{i}_i \vec{i}_j \cdot A_k \vec{i}_k$$

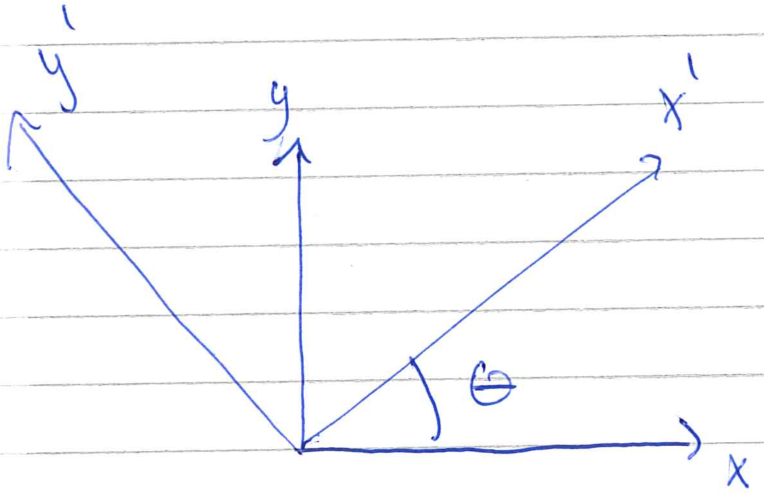
$$= P_{ij} A_k \vec{i}_i (\vec{i}_j \cdot \vec{i}_k)$$

$$= P_{ij} A_k \vec{i}_i \delta_{jk}$$

$$= P_{ij} A_j \vec{i}_i$$

Noen detaljer om transformasjon basert på kapittel 7 i Matthews

La oss se på enkel rotasjon i 2D



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

Matrise form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}^{\overrightarrow{L}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Altså

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underset{\rightarrow}{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{\rightarrow}{L} \vec{x}$$

Invers rotasjon $\underset{\rightarrow}{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underset{\rightarrow}{L}^{T}$$

Vi har $\underset{\rightarrow}{L}\,\underset{\rightarrow}{L}^{T} = \underset{\rightarrow}{I}$

eller

$$L_{ij} L_{kj} = \delta_{ik}$$

En slik matrise kalles orthogonal

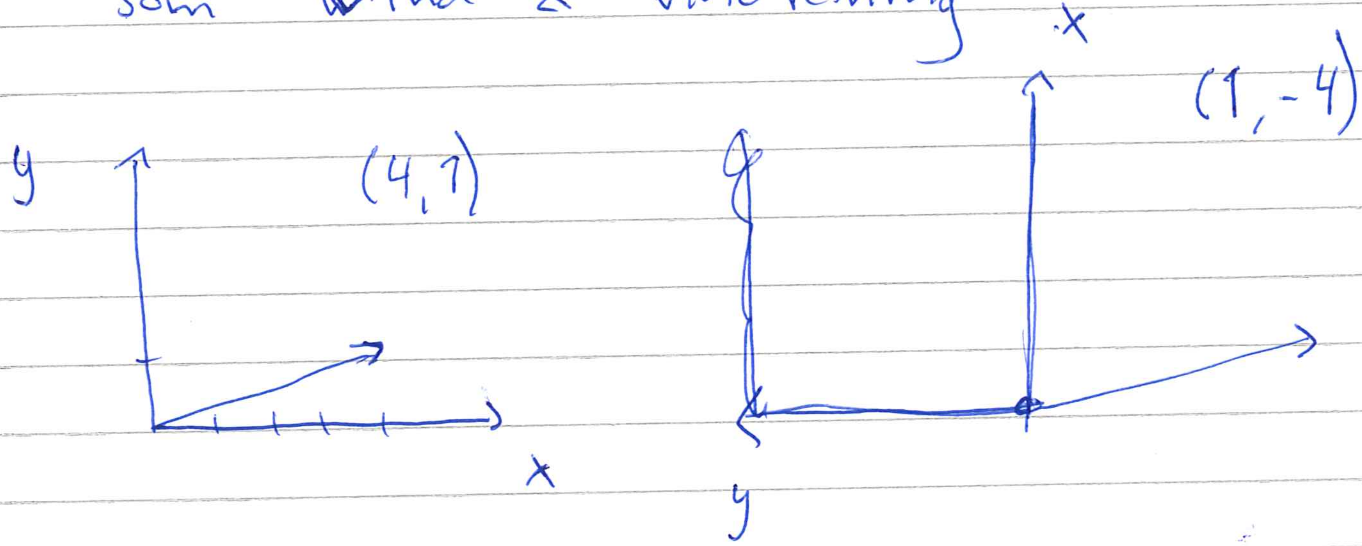
Denne transformasjonen er

åpenbart det fysisk riktige!

~~Feks hvis det ble~~

Feks hvis vi tenker på noe fysisk

som vind & vindretning



Slik må det være.

Dvs at en vektor

til fredstiller

vektor:

$$v'_i = L_{ij} v_j \quad \text{eller} \quad \vec{v}' = \underline{L}\, \vec{v}$$

skalarer:

$$s' = s$$

~~Ettersom~~

La f være et skalarfelt, da

er ∇f et vektorfelt.

Dette medfører at

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = L_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

[Kjerneregel]

(2 - rank, 3 - rank ...)

Tensorer må også oppfylle

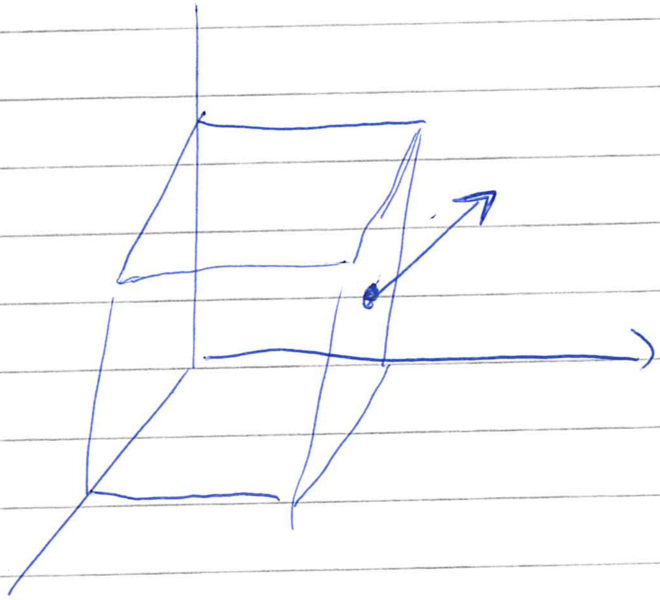
transformasjonsegenskaper (kjerneregler)

$$T'_{ij} = L_{ik} L_{jm} T_{km}$$

$$P'_{ijk} = L_{ip} L_{jp} L_{kr} P_{pqr}$$

Kapittel 2 Fysiske betraktninger

Vi tenker oss en box eller en tetraheder av vilkårlig størrelse



- 6 sider
- en vektor (som kan deles i 3 retninger) per side

$\Rightarrow$ 18 "komponenter" (frihetsgrader som må bestemmes)

Spenning er kraft per flateenhet.

$$\vec{P}_n = \frac{d\vec{f}}{d\sigma_n}$$

hvor $d\vec{f}$ er kraften på flateelement $d\sigma_n$. Flateelementet $d\sigma_n$ har enhetsnormal $\vec{n}$

Enhet for spenning er Pascal $= \frac{N}{m^2}$

Spenning kan deles i normalspenning (P_{nn}) og skjærspenninger (P_{nt}) (2 stk i 3D, 1 stk i 2D)

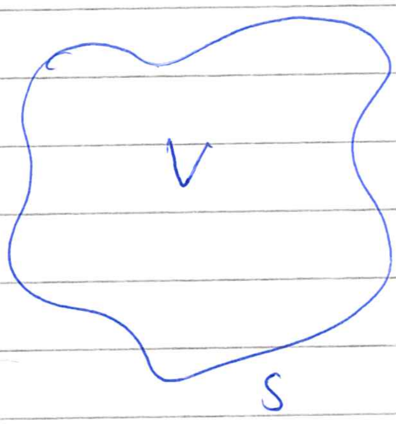
$$P_{nn} = \vec{P}_n \cdot \vec{n}$$

$$P_{nt} = |P_n \times n|$$

Hvis vi ser på ~~et~~ en

material partikkel (virtuell partikkel) V

med overflate S



Så er ~~kraften~~ spenningskreftene på V

$$\vec{F} = \int_S \vec{P}_n \, d\sigma_n$$

Legg merke til at vi her

kun fokuserer på krefter på overflaten !

Altså ikke gravitasjon, elektromagnetiske

krefter osv.

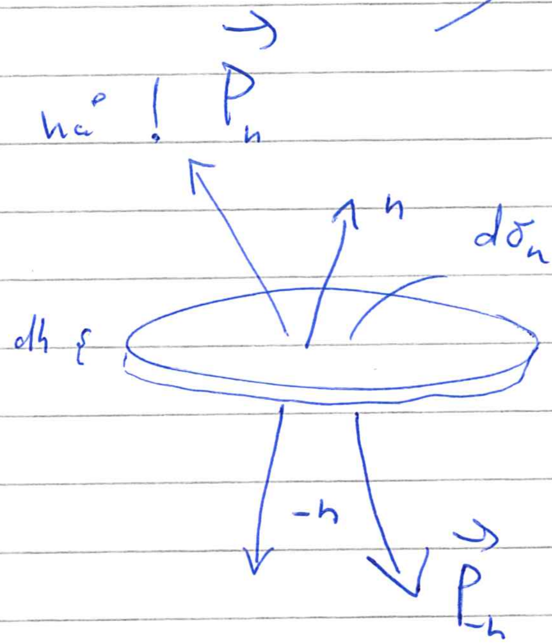
Kraft per volumenhet er

$$\vec{f} = \frac{1}{V} \int_S \vec{P}_n \, d\sigma_n$$

(altså kraft-tetthet)

Dette er størrelsen som det er naturlig å snakke om fra et kalkulus perspektiv. — denne størrelsen har punktvis mening.

Kalkulus vil hjelpe oss nå!



La oss analysere et flateelement med to sider som har motsatt rettet normalvektorr

Massen til skiven : $dm = \rho \, d\sigma_n \, dh$

Kraft pr. masseenhet $\left(\vec{P}_n + \vec{P}_{-n}\right) / \rho dh$

Newton's 2. lov $\vec{F} = m\vec{a}$

og Newton's 2. lov per masseenhet

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{P}_n + \vec{P}_{-n}}{\rho dh.}$$

16)

Her ser vi at vi har kommet i en underlig posisjon

$\vec{a}$ avhenger av $\vec{P}_n + \vec{P}_{-n}$ og dh. I og med at dette er en virituell skive kan jeg velge dh vilkårlig liten. ~~Men for dh~~

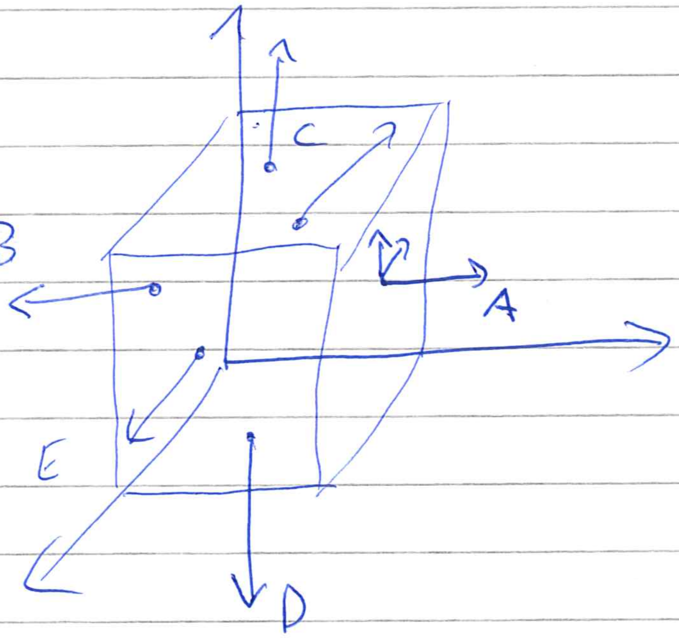
Men ettersom dh går mot 0 vil $\vec{a}$ gå mot ∞ hvis ikke $\vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}$

Det kan vi ikke ha noe av

$$\Leftrightarrow \vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}$$

Vi begynte med 18

komponenter / frihetsgrader på boksen.



A = −B

C = −D

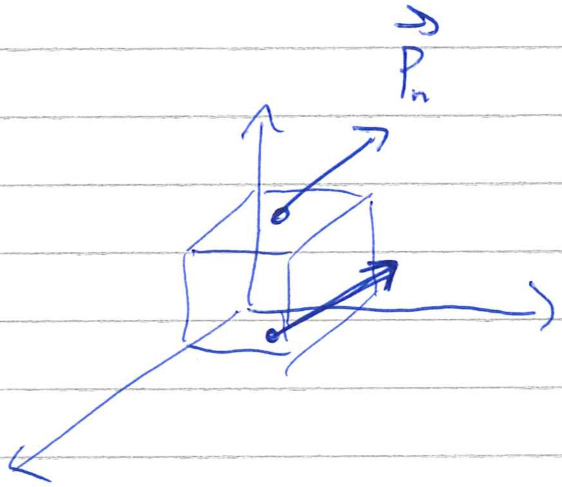
E = −F

⟶ Nok i 15.

Vi begynte med 18

komponenter/frihetsgrader på

boksen



$$\vec{P}_n = -\vec{P}_n$$

$\Longrightarrow$ Fjernet halvparten

og er nå

nede i 9.