UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK3220/MEK4220 — Kontinuumsmekanikk
Eksamensdag:	Onsdag 2. desember 2015.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottman: Mathematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes. Svar som f.eks ja/nei eller venstre/høyre teller ikke som svar. Formelark ligger bakerst.

Oppgave 1.

(10 poeng) a) Utled Navier's elastisitetslikning fra Cauchy's likevektslikning og Hooke's lov.

(10 poeng) b) Anta Hooke's lov og beregn normal og skjærspenning med hensyn på planet $z = 0$.

(10 poeng) c) Anta Hooke's lov og regn ut spenning for en stiv bevegelse i 2D. Stiv bevegelse i 2D er som følger:

$$\boldsymbol{u} = c\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(Fortsettes side 2.)

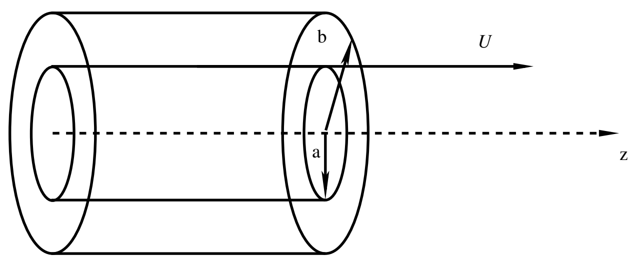

Figure 1: Strømning mellom to sylindere hvor den ene beveger seg.

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal vi se på strømningen mellom to sylindere (med radius a og b), hvorav den indre beveger seg med (stasjonær) hastighet U, som vist i Figur 1. Væsken er inkompressibel og Newtonsk.

(10 poeng) a) Bruk kontinuitetslikningen og θ-komponenten til Navier-Stokes likninger til å argumentere for at strømningen i dette tilfelle vil være på formen:
$\mathbf{u} = u_z(r)\mathbf{e}_z$, gitt at strømningen er stasjonær, z-uavhengig, og rotasjonelt symmetrisk (θ-uavhengig).

(10 poeng) b) Utled analytisk løsning for hastighet under forutsetning av at trykket er 0.

(10 poeng) c) Anta nå at strømningen utsettes for et trykkfall slik at $\nabla p = \beta \mathbf{e}_z$, hvor β er konstant, og regn ut analytisk løsning.

(10 poeng) d) Regn ut normal- og skjær-spenningen på veggene.

Oppgave 3.

En masse M er plassert på en stav, som vist i figur 2. Vi ser bort fra vekten til staven. (HINT: Det kan lønne seg å regne i kartesiske koordinater så lenge som mulig.)

(Fortsettes side 3.)

(10 poeng) a) Staven har et rundt tversnitt med radius R, en lengde L og er laget av gull. Når staven belastes, så vil en kraft $M\vec{g}$ virke på staven i z-retning, se figur 2. Vi antar at stress tensoren er gitt ved

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_0, \tag{1}$$

hvor

$$\sigma_0 = -\frac{Mg}{\pi R^2}, \tag{2}$$

og g er tyngdens akselerasjonen ($g = 9.81 m/s^2$). Beregn forskyvingsveltet $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ for en stav med Youngs modul E og Poisson ratio ν. Hva er lengde L' og radius R' til staven etter belastning? Anta at maksimal spenning (yield stress) som gull tåler er 100 MPa. Hva er maksimal vekt $M_{\max}$ som en stav med radius $R = 3.5$mm kan bære?

(20 poeng) b) I praksis viser seg det at staven knekker ved belastninger som er mye mindre enn $M_{\max}$. Årsaken er at staven bøyes som vist i figur 3. Vi ønsker å se nærmere på problemet og finne en passende radius R til en stav som tåler en gitt vekt M. Staven har lengde L. Vi går frem på følgende måte:

- Anta at y-komponenten til momentet M_y i staven er gitt ved: $M_y(z) = u(z)Mg$ og finn differensiallikningen for den horizontale forskyvingskomponenten $u(z)$.
- Anta null forskyvning (eller fritt opplagret) i $z = 0$ og $z = L$ og videre at $u(z) = \sin(\omega z)$. Finn mulige verdiene til ω som oppfyller randbetingelsen. Finn den minste verdien til M som oppfyller differensiallikningen (og randbetingelser).
- Beregn flatetreghetsmomentet I for en rund stav med radius R, som er gitt i vårt tilfelle er gitt ved:

$$I = \int_{A_0} x^2 \, dxdy, \tag{3}$$

hvor integralet tas over tversnittet.
- Finn uttrykket for radius R.

(Fortsettes side 4.)

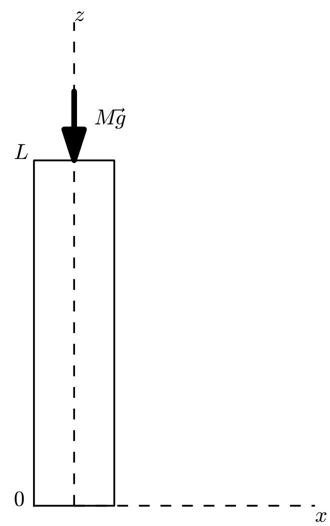

Figure 2: Stav under last.

- Anta at vi har en vekt $M = 150$ kg. Finn tykkelsen til staven som trengs for å bære massen. Staven er laget av gull med $E = 79$ GPa og har lengden $L = 1$ m.

(Fortsettes side 5.)

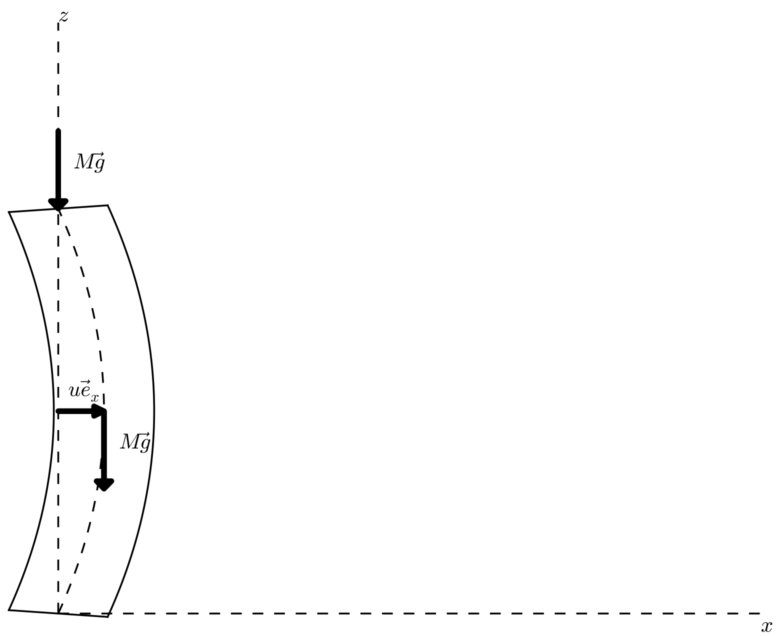

Figure 3: Knekking av stav under last.

(Fortsettes side 6.)

Formler

Vi bruker boldface notasjon for vektorer.

1. Youngs modul E og Poisson ratio ν :
   Lamé parameterne λ og μ er relatert til E og ν på følgende måte:

$$E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} \tag{4}$$

2. Hooke's lov for et isotropt materiale

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \epsilon_k \delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

3. invers Hooke's lov:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}(\sigma_{ij} - \nu(\sum_{k=1}^{3} \sigma_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ij}))$$

4. Newtonsk væske:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta S_{ij},$$

   hvor S er tøyningsrate tensoren.

5. Coulomb-Saint-Venant's lov:

$$M_t = \mu J \tau$$

6. Radiell deformasjon av sylinder:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}\right) = -f_r,$$

   hvor u_r er radiell forskyvning og f_r radiell kraft.

(Fortsettes side 7.)

7. Euler-Bernoulli's lov:

$$M_b = EI\kappa$$

hvor κ ofte approksimeres som $1/R$ eller $\partial^2 y/\partial z^2$

8. Navier-Stokes likninger (og kontinuitetslikningen) for en inkompressibelt Newtonsk væske

$$\begin{aligned} \rho(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}) &= -\nabla p + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{f} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned}$$

9. Navier-Stokes ligninger i sylinder-koordinater:

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_r}{\partial r}) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right) + \rho f_r$$
$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) =$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right) + \rho f_\theta$$
$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \rho f_z$$

10. Kontinuitetslikning i sylinder-koordinater:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

11. Cauchy's likevektslikningen:

$$0 = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ji} + f_i$$

12. Tøying in sylinder-oordinater:

$$\epsilon_{rr} = \tfrac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \epsilon_{\theta\theta} = \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \tfrac{u_r}{r} \qquad \epsilon_{zz} = \tfrac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$\epsilon_{r\theta} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u_\theta}{\partial r} + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \tfrac{u_\theta}{r}\right) \quad \epsilon_{rz} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u_r}{\partial z} + \tfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) \quad \epsilon_{\theta z} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial u_z}{\partial \theta} + \tfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)$$

SLUTT