Løsningsforslag MEK2200 20/12-2018

Oppgave 1

a) Se Gjevik kap 4.4

(1) Bevegelseslikning - Newton's 2 law

(2) Kontinuitetslikning - Konservering av masse

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbb{P} + \mathbf{f} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0 \qquad (2)$$

der $\mathbf{a}$ er akselerasjonsvektor, ρ er tetthet, $\mathbb{P}$ spenningstensor, $\mathbf{f}$ vektor av ytre volumkrefter og $\mathbf{v}$ hastighetsvektor.

b) $$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$$

$$\mathbb{P} = -p\,\mathbb{I} + \mu\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\right)$$

Satt inn i (1) gir Navier-Stokes likninger, dvs (2) og (3)

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} \qquad (3)$$

Oppgave 1

c) Vi antar små forskyvninger og får

$$\mathbb{a} = \frac{\partial^2 \mathbb{u}}{\partial t^2} \qquad (4)$$

der $\mathbb{u}$ er forskyvningsvektor.
Bruker videre Hooke's lov

$$\mathbb{P} = \kappa \nabla\cdot\mathbb{u}\, \underline{\mathbb{I}} + 2\mu\left(\varepsilon - \frac{\nabla\cdot\mathbb{u}}{3}\mathbb{I}\right) \qquad (5)$$

der $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbb{u} + (\nabla\mathbb{u})^T)$, κ og μ er konstanter.

(4) og (5) satt inn i (7) gir

$$\frac{\partial^2 \mathbb{u}}{\partial t^2} = \frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla\nabla\cdot\mathbb{u} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbb{u} + \mathbb{f} \qquad (6)$$

der $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$

Oppgave 2

a) Strømningen er beskrevet av Navier-Stokes likninger, der $\mathbf{v} = (u, v, w)$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \qquad (2)$$

Siden strømningen er stasjonær så forsvinner $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ og $\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Siden tettheten er konstant forenkles (2) til

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad (3)$$

Det er ingen bevegelse i z-retning ($w=0$), så vi får

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0$$

Siden strømningen er rettlinjet har vi også at $v = 0$, og dermed at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Fra dette følger at u kun er en funksjon av y, $u(y)$.

Oppgave 2

a) fortsatt

Har funnet at $\mathbf{v} = (u(y), 0, 0)$

(1) blir i x-retning:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla u = \nu \nabla^2 u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f_x$$

$$\nabla u = \left(0, \frac{\partial u}{\partial y}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad (u, 0, 0) \cdot \left(0, \frac{\partial u}{\partial y}, 0\right) = 0$$

og vi sitter igjen med (siden $\mathbf{v} \cdot \nabla u = 0$ og $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$)

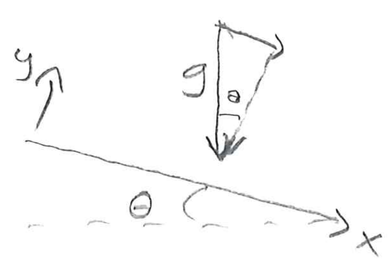
Ingen variasjon i x-retning

$$0 = \nu \nabla^2 u + f_x$$

(1) i y-retning gir

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + f_y$$

De ytre volumkreftene følger fra gravitasjonskreftene



$$f_x = g \sin \theta$$

$$f_y = -g \cos \theta$$

Oppgave 2

a) fortsatt

Fullstendig likningssett blir

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin\theta$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta$$

Grensebetingelser:

$u(0) = 0$ (No-slip)

$\frac{\partial u(h)}{\partial y} = 0$ (Ingen skjærspenning)

$p(h) = p_0$ (Gitt)

Oppgave 2

b)

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin\theta$$

Integrerer to ganger og får

$$u = -\frac{g}{\nu 2} \sin\theta\, y^2 + Ay + B$$

der A og B er konstanter

$$u(0) = B = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{\nu} \sin\theta\, y + A$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y=h) = -\frac{gh}{\nu} \sin\theta + A = 0$$

$$A = \frac{gh}{\nu} \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad u(y) = -\frac{g}{2\nu} \sin\theta\, y^2 + \frac{gh}{\nu} \sin\theta\, y$$

$$\underline{\underline{u(y) = \frac{g\sin\theta}{\nu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)}}$$

Oppgave 2

b) Volumstrømmen

$$Q_0 = \int_0^h u(y)\,dy$$

$$= \int_0^h -\frac{g\sin\theta}{\nu}\left(\frac{y^2}{2} - hy\right)dy$$

$$= -\frac{g\sin\theta}{\nu}\left[\frac{1}{6}y^3 - \frac{h}{2}y^2\right]_0^h$$

$$= -\frac{g\sin\theta}{\nu}\left(\frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{2}h^3\right)$$

$$= \frac{g\sin\theta}{3\nu}h^3$$

Oppgave 2

c) Ved skilleflaten har man kontinuerlig spenning og hastighet

$$\mathbb{P}^1 \cdot \mathbb{n} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{n}$$

$$\mathbb{v}^1 = \mathbb{v}$$

Forenklet:

$$\nu_1 \frac{\partial u^1}{\partial y} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \text{ved } y = h_1$$

$$u^1 = u \quad , \text{ved } y = h_1$$

d) Har

$$u^1(y) = -\frac{g}{2\nu_1} \sin\theta \, y^2 + A_1 y + B_1 \quad , 0 \leq y \leq h_1$$

$$u(y) = -\frac{g}{2\nu} \sin\theta \, y^2 + A y + B \quad , h_1 \leq y \leq h + h_1$$

4 ukjente, A_1, A, B_1, B, og 4 grensebetingelser:

1) $u^1(0) = 0$

2) $u^1(h_1) = u(h_1)$

3) $\nu_1 \frac{\partial u^1}{\partial y}(h_1) = \nu \frac{\partial u}{\partial y}(h_1)$

4) $\nu \frac{\partial u}{\partial y}(h + h_1) = 0$

Oppgave 2

d) fortsatt

1) → $u^1(0) = B_1 = 0$

4) $$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\bar{g}}{\nu} y + A \quad , \quad \text{der } \bar{g} = g\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\bar{h}) = 0 \quad , \quad \text{der } \bar{h} = h + h_1$$

$$\Rightarrow -\frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu} + A = 0$$

$$A = \frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu}$$

3) $$\nu_1 \frac{\partial u'}{\partial y} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \text{ved } y = h_1$$

$$\nu_1\left(-\frac{\bar{g}h_1}{\nu_1} + A_1\right) = \nu\left(-\frac{\bar{g}h_1}{\nu} + \frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu}\right)$$

$$\nu_1 A_1 = \bar{g}h_1 - \bar{g}h_1 + \bar{g}\bar{h}$$

$$A_1 = \frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu_1}$$

Oppgave 2

d) fortsatt

2) $u^1(h_1) = u(h_1)$

$$-\frac{\bar{g} h_1^2}{2\nu_1} + \frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu_1} h_1 + B_1^{=0} = -\frac{\bar{g} h_1^2}{2\nu} + \frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu} h_1 + B$$

$$B = \frac{\bar{g} h_1^2}{2}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_1}\right) - \bar{g}\bar{h} h_1 \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_1}\right)$$

$$B = \frac{\bar{g} h_1^2}{2\nu}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_1}\right) - \frac{\bar{g}\bar{h} h_1}{\nu}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_1}\right)$$

$$B = \frac{\bar{g} h_1}{\nu}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_1}\right)\left(\frac{h_1}{2} - (h + h_1)\right)$$

$$B = \frac{\bar{g} h_1}{\nu}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_1}\right)\left(-h - \frac{h_1}{2}\right)$$

$$B = \frac{\bar{g} h_1^2}{\nu}\left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1\right)\left(\frac{h}{h_1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u^1(y) = -\frac{\bar{g}}{2\nu_1} y^2 + \frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu_1} y = -\frac{\bar{g}}{\nu_1}\left(\frac{y^2}{2} - \bar{h} y\right)$$

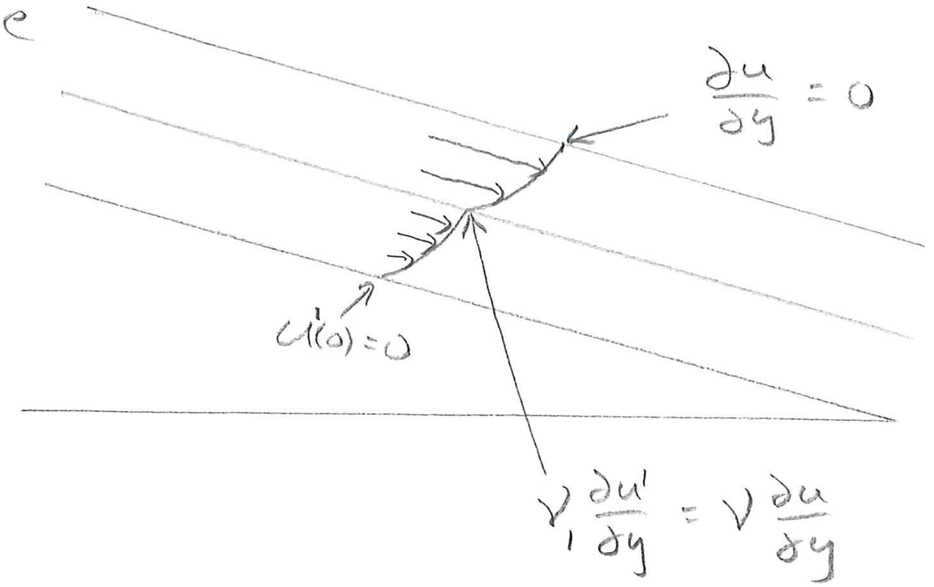
$$u(y) = -\frac{\bar{g}}{2\nu} y^2 + \frac{\bar{g}\bar{h}}{\nu} y + \frac{\bar{g} h_1^2}{\nu}\left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1\right)\left(\frac{h}{h_1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\bar{g}}{\nu}\left(\frac{y^2}{2} - \bar{h} y - h_1^2\left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1\right)\left(\frac{h}{h_1} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Oppgave 2

d) fortsatt

Skisse



Eksakt form avhenger av ν_1/ν.
Hvis $\nu_1 = \nu$, så er $\frac{\partial u'}{\partial y}(h_1) = \frac{\partial u}{\partial y}(h_1)$
og løsningen blir som i (a), med
høyde $h_1 + h$.
Når $\frac{\nu_1}{\nu} \to \infty$ blir det nederste
laget å regne som et fast stoff.
Løsningen blir som i a), men
forskjøvet slik at $u(h_1) = 0$

Oppgave 3

a)

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

For at $\mathbb{P}$ skal kvalifisere som spenningstensor, så må den være symmetrisk. Dette følger av Cauchy's andre spenningsrelasjon.

Altså $c = b$

b)

For en stasjonær væske uten ytre påvirkninger har man

$$\nabla \cdot \mathbb{P} = 0$$

Altså må man ha

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial d}{dy} + \frac{\partial d}{\partial z} = 0$$

Oppgave 3

c) Må løse $\det(\mathbb{P}-\sigma\mathbb{I}) = 0$, der σ er prinsipalspenningene.

Karakteristisk polynom:

$$(d-\sigma)\left((d-\sigma)(a-\sigma)-b^2\right) = 0$$

3 løsninger

$$\sigma_1 = d$$
$$\sigma_{2,3} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2}$$

Retningene finnes ved å løse $(\mathbb{P}-\sigma\mathbb{I})\cdot\mathbf{n} = 0$ for $\mathbf{n}$. Starter med $\sigma_1 = d$

$$(a-d)n_x + bn_y = 0$$
$$bn_x + (b-b)n_y = 0$$
$$(b-b)n_z = 0$$

Triviell løsning $\mathbf{n} = (0,0,1)$

Oppgave 3

b) fortsatt

Fortsetter for $\sigma = \sigma_{2,3}$

$$(a-\sigma)n_x + bn_y = 0$$
$$bn_x + (b-\sigma)n_y = 0$$
$$(b-\sigma)n_z = 0$$

Vi ser at $n_z = 0$ siden $b \neq \sigma$.

Velger $n_y = z$ og får

$$n_x = -\left(\frac{b-\sigma}{b}\right)z$$

Skalerer slik at $|\mathbf{n}| = 1$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{n} = \underline{\underline{\left(-\frac{d-\sigma}{\sqrt{b^2+(d-\sigma)^2}}, \frac{b}{\sqrt{b^2+(d-\sigma)^2}}, 0\right)}}$$