UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK2200/MEK3220/MEK4220 — Kontinuumsmekanikk
Eksamensdag:	Mandag 28. november 2016.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottman: Mathematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes. Svar som f.eks ja/nei eller venstre/høyre teller ikke som svar. Formelark ligger bakerst.

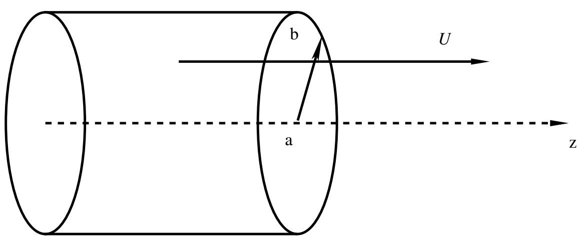
Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på trykkdrevet strømning i en sylinder (med radius b), som vist i Figur 1. Væsken er inkompressibel og Newtonsk. Anta $\mathbf{u} = u_z(r)\mathbf{e}_z$ ettersom strømningen er stasjonær, z-uavhengig, og rotasjonelt symmetrisk (θ-uavhengig).

(10 poeng) a) Utled analytisk løsning for hastighet under forutsetning av at trykket er $\nabla p = \beta$.

(10 poeng) b) Regn ut normal- og skjær-spenningen på veggene.

(10 poeng) c) Regn ut volumstrømmen over et tverrsnitt normalt på z-retningen.



Figur 1: Strømning i sylinder.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Periodiske bevegelser, som for eksempel gange, forårsaker kompressjonsbølger i skjelettet vårt. I dette eksempelet skal vi bestemme den elastiske energien relatert til gange eller annen periodisk bevegelse i en langhalset dinosaurus.

(10 poeng) a) Utled følgende likning fra Naviers elastisitetslikning

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Hvor vi antar antar endimensjonal kompressjonsbølge, altså

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(10 poeng) b) Finn uttrykk for c via elastisitetsparameterene λ og μ.

(10 poeng) c) Vis at løsninger på formen

$$\sin(k(x \pm ct)) \text{ and } \cos(k(x \pm ct))$$

tilfredstiller likningen.

(10 poeng) d) Beregn den elastiske energien.

(10 poeng) e) Vis at likningen

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

er lineær.

Oppgave 3

I denne oppgaven antar vi Kartesiske koordinater

(10 poeng) a) Anta

$$P_{ij} = a x_i x_j + b x_k \delta_{ik} b x_l \delta_{jl}, \quad 0 < i, j, k, l < 4.$$

Forenkle uttrykket så mye som mulig.

(10 poeng) b) Anta $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Skriv opp P_{11}, P_{12}, og P_{13}.

(10 poeng) c) Regn ut $\nabla \cdot \mathcal{P}$ hvor $\mathcal{P}$ er tensoren med komponenter P_{ij} .

(10 poeng) d) Regn ut $\nabla \times \nabla \cdot \mathcal{P}$ hvor $\nabla\times$ er curl operatoren.

(10 poeng) e) En spenningsfri kube av stål (Youngs modulus 200 GPa) forskyves en meter og roteres 90 grader. Vi ser bort fra akselerasjon. Hva er den resulterende spenningen i kuben?

(Fortsettes på side 3.)

Formler

Vi bruker boldface notasjon for vektorer.

1. Youngs modul E og Poisson ratio ν :
   Lamé parameterne λ og μ er relatert til E og ν på følgende måte:

$$E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} \tag{1}$$

2. Hookes lov for et isotropt materiale

$$\mathcal{P}_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}.$$

3. invers Hookes lov:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}(\mathcal{P}_{ij} - \nu(\sum_{k=1}^{3} \mathcal{P}_{kk}\delta_{ij} - \mathcal{P}_{ij})).$$

4. Elastisk energi:

$$E = \frac{1}{\rho}\left(\lambda\frac{\nabla\cdot\mathbf{u}^2}{2}\right) + \mu\epsilon_{ij}^2.$$

5. Newtonsk væske:

$$\mathcal{P}_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij},$$

   hvor $\dot{\epsilon}$ er tøyningsrate tensoren.

6. Navier-Stokes likninger (og kontinuitetslikningen) for en inkompressibelt Newtonsk væske

$$\begin{aligned} \rho(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}) &= -\nabla p + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{f} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned}$$

7. Navier-Stokes ligninger i sylinder-koordinater:

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_r}{\partial r}) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right) + \rho f_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) =$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right) + \rho f_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \rho f_z$$

(Fortsettes på side 4.)

8. Kontinuitetslikning i sylinder-koordinater:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

9. Cauchys likevektslikning:

$$0 = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{P}_{ji} + f_i$$

10. Naviers ligning:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{f}$$

11. Tøying in sylinder-oordinater:

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \epsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \end{array}$$