Løsningsforslag Eksamen MEK2200, Høst 2017

Oppgave 1

a) Normalspenningen finnes som

$$\mathbb{P}_{n_{(i)}} = \mathbb{P} \cdot n_{(i)} \quad , \quad i = (1, 2, 3)$$

på hver av de tre sideflatene, med normalvektorer

$$n_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$n_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

$$\mathbb{P}_{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{i}\,\tau\sin\varphi + \mathbf{j}\,\tau\cos\varphi}}$$

$$\mathbb{P}_{n_2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-\frac{\tau}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})}}$$

$$\mathbb{P}_{n_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{\tau}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})}}$$

Merk at i ikke er en vanlig index, og det er ingen summasjon på repetert i.

Oppgave 1

b) Normalspenningen er gitt som

$$p_{nn}^{(i)} = \mathbb{P}_{n_{(i)}} \cdot n_{(i)}$$

for hver av de tre sideflatene.

$$p_{nn}^{(1)} = (\tau \sin\varphi, \tau \cos\varphi) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$= 2\tau \sin\varphi \cos\varphi$$

$$= \underline{\underline{\tau \sin 2\varphi}}$$

$$p_{nn}^{(2)} = -\frac{\tau}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1,1)$$

$$= \underline{\underline{\tau}}$$

$$p_{nn}^{(3)} = \frac{\tau}{\sqrt{2}}(-1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$= \underline{\underline{-\tau}}$$

Alle normalspenninger er rettet samme vei som $n_{(i)}$.

Oppgave 1

b) Tangensialspenningen er gitt ved

$$\mathbb{P}_{nt}^{(i)} = \mathbb{P}_{n_{(i)}} - P_{nn}^{(i)} n_{(i)} \quad , \; i = (1,2,3)$$

$$\mathbb{P}_{nt}^{1} = \tau \sin\varphi\, \mathbb{i} + \tau\cos\varphi\, \mathbb{j} - \tau \sin 2\varphi \left(\cos\varphi\, \mathbb{i} + \sin\varphi\, \mathbb{j}\right)$$

$$= \underline{\underline{\tau \sin\varphi \left(1 - 2\cos^2\varphi\right)\mathbb{i} + \tau\cos\varphi\left(1 - 2\sin^2\varphi\right)\mathbb{j}}}$$

$$\mathbb{P}_{nt}^{2} = -\frac{\tau}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{i} + \mathbb{j}\right) + \tau\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\mathbb{i} + \mathbb{j}\right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$\mathbb{P}_{nt}^{3} = \frac{\tau}{\sqrt{2}}\left(-\mathbb{i} + \mathbb{j}\right) - (-\tau)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{i} - \mathbb{j}\right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Størrelsen til $\mathbb{P}_{nt}^{1}$ finnes fra

$$|\mathbb{P}_{nt}^{1}| = |n^1 \times \mathbb{P}_n| = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \tau\sin\varphi & \tau\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |(\tau\cos^2\varphi - \tau\sin^2\varphi)\mathbb{k}|$$

$$= \underline{\underline{|\tau\cos 2\varphi|}}$$

Oppgave 1

c) Kraften som virker på hver sideflate finnes som

$$\mathbb{F}^{(i)} = \int_{\Gamma_i} \mathbb{P}_{n_i}\, ds$$

Den totale kraften som virker på objektet er

$$\mathbb{F} = \sum_{i=1,2,3} \mathbb{F}^{(i)}$$

$$\mathbb{F}^1 = \int_{\Gamma_1} \mathbb{P}_{n_1}\, ds = \int_0^{\pi} \mathbb{P}_{n_1}\, r\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} (\mathbb{i}\, \tau \sin\varphi + \mathbb{j}\, \tau\cos\varphi)\, r\, d\varphi$$

$$= \mathbb{i}\, \tau r \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi + \mathbb{j}\, \tau r \int_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi$$

$$\underline{\underline{= 2\tau r\, \mathbb{i}}}$$

$$\mathbb{F}^2 = \mathbb{P}_{n_2} \Gamma_2 = \underline{\underline{-\tau r(\mathbb{i}+\mathbb{j})}}$$

$$\mathbb{F}^3 = \mathbb{P}_{n_3} \Gamma_3 = \underline{\underline{\tau r(-\mathbb{i}+\mathbb{j})}}$$

Totalkraft: $\mathbb{F} = \sum_i \mathbb{F}^i = \underline{\underline{0}}$

Oppgave 1

d) Prinsipalspenningsretning bestemmes ved at $\mathbb{P}_{nt}^{(i)} = 0$. Dette er allerede oppfylt for $i = 2, 3$, så for disse to sideflatene er normalspenningen også prinsipalspenningen.

For $i = 1$ får vi

$$\mathbb{P}_{nt}^{1} = 0 = \tau \sin\varphi (1 - 2\cos^2\varphi)\mathbb{i} + \tau \cos\varphi (1 - 2\sin^2\varphi)\mathbb{j}$$

som er oppfylt når $\cos^2\varphi = \sin^2\varphi = \frac{1}{2}$

Dvs $\varphi = \frac{\pi}{4}$ og $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, med tilhørende retninger.

Prinsipalspenningen er da gitt ved

$$P_{nn}^{1}\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right) = \tau \sin\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\tau}}$$

$$P_{nn}^{1}\left(\varphi = \frac{3\pi}{4}\right) = \tau \sin\frac{3\pi}{2} = \underline{\underline{-\tau}}$$

Kan også finne hovedspenningene uavhengig av flater. Har at

$\mathbb{P} \cdot \mathbb{n} = \sigma \mathbb{n}$, der σ er hovedsp.

$$(\mathbb{P} - \sigma \mathbb{I}) \cdot \mathbb{n} = 0$$

$$\det(\mathbb{P} - \sigma \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \sigma^2 - \tau^2 = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma = \pm \tau}}$$

Oppgave 2

a) Det er oppgitt at strømningen er 2-dimensjonal, så hastighetsvektoren

$$\mathbf{v} = (u(x,z), 0, w(x,z))$$

Vi har at $u(x,y) = 0$ siden de eneste kreftene som virker er i z-retning, og kanalen er orientert normalt på x-retningen. Derfor

$$\mathbf{v} = (0, 0, w(x,z))$$

Fra kontinuitetslikningen har vi

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

hvilket betyr at w ikke kan være avhengig av z. Derfor har vi

$$\mathbf{v} = (0, 0, w(x))$$

Naturlige grensebetingelser ved planene er full heft (no-slip)

$$\underline{\underline{w\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0}}$$

Oppgave 2

b) Bruker Navier-Stokes i z-retning

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w - g$$

Stasjonært og rettlinjet strøm gir

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w - g$$

$$0 = \frac{\beta}{\rho} + \nu \nabla^2 w - g$$

$$0 = \frac{\beta}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g$$

Integreres to ganger

$$w(x) = \frac{\rho g - \beta}{2\mu} x^2 + Ax + B$$

Bestemmer A og B med $w(\pm \frac{h}{2}) = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{w(x) = \frac{\rho g - \beta}{2\mu}\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)}}$$

Oppgave 2

c) I Navier-Stokes har vi benyttet Newton's friksjonslov

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}$$

Eneste ikke-null komponenter i $\dot{\varepsilon}_{ij}$ er

$$\dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho g - \beta}{\mu}\right)x$$

Skjærspenningens størrelse finnes fra

$$\mathbb{P}_{nt} = |\mathbb{P}_n \times \mathbf{n}|$$

Har $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\cdot\mathbf{n}$, der $\mathbf{n} = \pm\mathbf{i}$ for $x = \pm\frac{h}{2}$

$$\mathbb{P}_n = \pm\left(-p\mathbf{i} + (\rho g - \beta)x\,\mathbf{k}\right), \quad -\,''\,-$$

Hvilket gir

$$\mathbb{P}_{nt} = (\rho g - \beta|x = \pm(\rho g - \beta)\frac{h}{2},$$

for de to sideflatene ved $x = \pm\frac{h}{2}$

Retningene ved flatene, $\mathbf{t}$, finnes ved

$$\mathbb{P}_{nt}\mathbf{t} = \mathbb{P}_n - \mathbb{P}_{nn}\mathbf{n}$$

Finner at $\mathbf{t} = \pm\mathbf{k}$, for $x = \mp\frac{h}{2}$

Skjærspenningen er derfor gitt ved

$$-(\rho g - \beta)\frac{h}{2}\,\mathbf{k}$$

ved begge plater

Oppgave 2

d)

$$\Delta = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

Eneste komponenter i $\dot{\varepsilon}_{ij}$ som ikke er null er $\dot{\varepsilon}_{13}$ og $\dot{\varepsilon}_{31}$

$$\Delta = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{13}^2 + \dot{\varepsilon}_{31}^2 \right) \quad \text{og} \quad \dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{31}$$

$$= 4\mu \dot{\varepsilon}_{13}^2$$

$$\dot{\varepsilon}_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\rho g - \beta}{\mu} x$$

$$\Delta = \mu \left(\frac{\rho g - \beta}{\mu} x \right)^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\mu} (\rho g - \beta)^2 x^2}}$$

Oppgave 2

e) Varmetransportlikning

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{\Delta}{\rho c} + Q$$

Forutsetter stasjonært $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, $T = T(x)$

$\Rightarrow \mathbf{v}\cdot\nabla T = 0$

Og ingen varmetilførsel $(Q = 0)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \kappa \nabla^2 T + \frac{\Delta}{\rho c}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{4}{\rho c \mu \kappa}(\rho g - 3)^2 x^2$$

Integrerer to ganger

$$T(x) = -\frac{(\rho g - 3)^2}{3\rho c \mu \kappa} x^4 + Ax + B$$

Integrasjonskonstanter A og B bestemmes ved at

$$T\left(\pm \frac{h}{2}\right) = T_0 \pm \frac{\Delta T}{2}$$

Får

$$\underline{\underline{T(x) = -\frac{(\rho g - 3)^2}{3\rho c \mu \kappa}\left(x^4 - \left(\frac{h}{2}\right)^4\right) + \frac{\Delta T}{h} x + T_0}}$$

Oppgave 2

d) Varmestrømmen er gitt ved Fourier's law

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} i$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{4(\rho g - \beta)^2}{3\rho c \mu x} x^3 + \frac{\Delta T}{h}$$

Ved $x = -\frac{h}{2}$

$$\underline{\underline{q_x = -k\left(+\frac{4(\rho g - \beta)^2}{3\rho c \mu x}\frac{h^3}{8} + \frac{\Delta T}{h}\right) i}}$$

Ved $x = \frac{h}{2}$

$$\underline{\underline{q_x = -k\left(-\frac{4(\rho g - \beta)^2}{3\rho c \mu x}\frac{h^3}{8} + \frac{\Delta T}{h}\right) i}}$$