Løsningsforslag Mek 2200 H24

1a) Bruker indeksnotasjon, altså

$$A = \{A_{ij}\}, \quad A_s = \{\tfrac{1}{2}A_{ij} + \tfrac{1}{2}A_{ji}\}$$

$$A_s : B = \tfrac{1}{2}A_{ij}B_{ij} + \tfrac{1}{2}A_{ji}B_{ij}$$

$$= \tfrac{1}{2}A_{ij}B_{ij} + \underline{\tfrac{1}{2}A_{ji}B_{ji}}$$

$$\boxed{B_{ij} = B_{ji}}$$

$$= \tfrac{1}{2}A_{ij}B_{ij} + \underline{\tfrac{1}{2}A_{ij}B_{ij}} = A_{ij}B_{ij}$$

rekkefølge på indekser kan bytter

1 b) Her kan man observere at 1a) kan brukes direkte.

Dvs $A = \nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$

$A_s = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) = \frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i}$

$B = A_s$

Dermed (eksplisitt utregning)

La $\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{j,i}$

Da har vi

$$\left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i}\right) \varepsilon_{i,j} =$$

$$= \frac{1}{2} u_{i,j} \varepsilon_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} \varepsilon_{i,j}$$

$$= \frac{1}{2} u_{i,j} \varepsilon_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} \varepsilon_{j,i} = u_{i,j} \varepsilon_{i,j}$$

1c) 3)

$$\nabla \cdot \sigma = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

$\boxed{\varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \vec{u}\text{, } \lambda \text{ og } \mu \text{ er konstante}}$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nabla \cdot \vec{u} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \text{ gitt "glatte" funksjoner}}$

$$= \lambda \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \nabla \nabla \cdot \vec{u}}$$

$$= (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

2 a) Bevegelseslikningen (eller Newton's 2. lov)

er som følger:

$$\rho \vec{a} = \vec{f}$$

Her gjelder altså loven punktvis

$\vec{f}$ kan være volumkrefter a la gravitasjon, elektromagnetiske osv og dessuten overflate-krefter

Altså ~~$\vec{f}$ ... f_v~~

$\vec{f}$ er sammensatt av $\vec{f}^{v}$ volum og $\vec{f}^{s}$ overflate.

Som navnene "volumkrefter" og "overflatekrefter" tilsier så virker kreftene på forskjellig måte, henholdsvis på volumet eller overflaten til volumet.

Altså

$$\boxed{\int_{\Omega} \vec{f}\,dx = \int_{\Omega} \vec{f}^{\,v}\,dx + \int_{\partial\Omega} \vec{f}^{\,s}\,ds} \qquad 1)$$

Cauchy's spenningsrelasjon sier at

$\vec{f}^{\,s} = \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n}$ hvor $\underset{\rightarrow}{P}$ er

spenningstensoren for et ~~vol~~ vilkårlig volum/legme. Dessuten har vi "divergensteoremet" for tensorer

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n}\,ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}\,dx} \qquad 2)$$

6)

1) og 2) sammen gir

$$\int_\Omega \vec{f}\, dx = \int_\Omega \vec{f}^v\, dx + \int_\Omega \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}\, dx$$

Dermed har vi bevegelseslikningen over et vilkårlig volum:

$$\int_\Omega \rho \vec{a} = \int_\Omega \vec{f}^v\, dx + \int_\Omega \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}\, dx$$

Ettersom volumet Ω er vilkårlig kan vi ta den punktvis:

$$\rho \vec{a} = \vec{f}^v + \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}$$

2 b) Navier's statiske likning gjelder i det statiske tilfelle hvor $\vec{a} = 0$.

Altså vil

$$\nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} = -\vec{f}^{\,v}$$

$\nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}$ har vi allerede regnet ut i oppgave 1c)

Dermed

$$\nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} = -\vec{f}^{\,v}$$

I oppgaveteksten er det glemt et minustegn

2c) Normalspenningen i punkt P er null. Vi argumenterer utifra ~~Kontain~~ kontinuitet:

Er vi i punktet P og beveger oss ørlite til høyre så havner vi i "luften" utenfor.

Vi regner med at vi kan se bort fra lufttrykket. Dermed er det null. Anta videre at loddet har masse m. Da vil kraften $m\vec{g}$ virke på staven gitt at staven har utstrekning q så er normalspenningen i Q:

$$m\vec{g}/q$$

2d

Som i 12.2 i boka 9)

antar vi $\vec{u} = \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \gamma y \\ \gamma z \end{pmatrix}$

$\nabla \cdot \vec{u} = \varepsilon + 2\gamma$, $\underset{\to}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

$$\underset{\to}{\sigma} = \begin{pmatrix} \lambda(\varepsilon + 2\gamma) + 2\mu\varepsilon & & \\ & \lambda(\varepsilon+2\gamma) + 2\mu\gamma & \\ & & \lambda(\varepsilon+2\gamma) + 2\mu\gamma \end{pmatrix}$$

Må videre relatere ε og γ.

Ettersom σ_{xx} her er ulik null,

$= mg/q$

mens σ_{yy} og σ_{zz} må være null så fås $\lambda(\varepsilon+2\gamma)+2\mu\gamma = 0$

$$\lambda\varepsilon + 2\gamma\lambda + 2\mu\gamma = 0 \qquad 10)$$

$$\gamma = \frac{-\lambda\varepsilon}{2(\lambda+\mu)}$$

Dermed

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon + 2\gamma) + 2\mu\varepsilon$$

$$= \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon + 2\lambda\gamma$$

$$= \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon - \cancel{2}\lambda\left(\frac{\lambda\varepsilon}{\cancel{2}(\lambda+\mu)}\right)$$

$$= \frac{\lambda\varepsilon(\lambda+\mu)}{\lambda+\mu} + \frac{2\mu\varepsilon(\lambda+\mu)}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^2\varepsilon} + \lambda\varepsilon\mu + 2\mu\varepsilon\lambda + 2\mu^2\varepsilon - \cancel{\lambda^2\varepsilon}}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varepsilon$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\,\varepsilon = \frac{mg}{q}$$

$$\varepsilon = \frac{mg(\lambda+\mu)}{q\mu(3\lambda+2\mu)}$$

Dermed

$$\gamma = \frac{-\lambda\varepsilon}{2(\lambda+\mu)} = -\frac{\lambda}{2\cancel{(\lambda+\mu)}}\,\frac{\cancel{(\lambda+\mu)}\,mg}{q\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$= -\frac{mg\lambda}{2q\mu(3\lambda+2\mu)}$$

og

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{mg(\lambda+\mu)}{q\mu(3\lambda+2\mu)}\,x \\[2ex] -\dfrac{mg}{2q\mu(3\lambda+2\mu)}\,y \\[2ex] \text{— '' —}\;\; z \end{pmatrix}$$

~~Skjærspenningene generelt er~~

2e)

Denne oppgaven er implisitt besvart i opgave 2d).

Men vansett, vi har satt opp $\vec{u} = \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \gamma y \\ \gamma z \end{pmatrix}$

Da kan vi argumentere med at

$$\nabla \cdot \vec{u} = \varepsilon + 2\gamma$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & \gamma & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon+2\nu & & \\ & \varepsilon+3\nu & \\ & & \varepsilon+3\nu \end{pmatrix}}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda(\varepsilon+2\gamma)+2\mu\varepsilon & & \\ & \lambda(\varepsilon+2\mu)+2\mu\gamma & \\ & & -''- \end{pmatrix}$$

Spenningen tangentielt til overflatene vil korrespondere til termer utenfor diagonalen. Altså er de 0

Alternativt kan man argumentere utfra kontinuitet som i ~~og~~ oppgave

2 c)

Oppgave 3a)

Vi begynner med Navier-Stokes likninger for inkompressibelt fluid, Newtonsk.

Altså

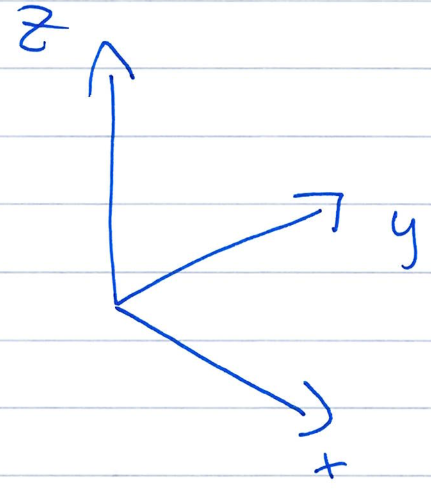
Legg. merke til at vi har gjort noen forenklinger

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \vec{f}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

1. $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ da strømningen er stasjonær.

2. $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}$



3. Randbetingelser

$\vec{v} = 0$ ~~fra~~ på bunn

overflaten er utsatt for

en spenning τ_w i x-retning

i y-retning så kan

vi sette enten null spenning

eller kanskje null hastighet.

Utifra dette la oss anta at

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umiddelbart får vi at

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = 0$$

Ettersom

$$\left(\vec{v} \cdot \nabla\right) = v(z)\frac{\partial}{\partial x}$$

og

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = v(z)\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} .$$

Videre antar vi at $p(x,y,z) = p(z)$
Nemlig at det er hydrostatisk
balanse mellom trykk og gravitasjon.

Setter vi opp Navier-Stokes
på komponentform fås likningene.

~~ved~~

3b) Direkte fra (2)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$ fås

$$p(z) = -\rho g z + A$$

A bestemes ved at

$$p(z)\Big|_{z=0} = p_0 = A$$

$$\Rightarrow p(z) = -\rho g z + p_0$$

Dessuten ~~v_x~~ eftersom

$$\frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow v_x(z) = A z + B$$

På toppen

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=0} = A = \frac{\tau_w}{\mu}$$

På bunn :

$$v_x(z=-h) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_w}{\mu}(-h) + B$$

Dermed

$$v_x(z) = \frac{\tau_w}{\mu} z + \frac{\tau_w}{\mu} h$$

3c) Antar her at $\vec{v}$ er på formen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(z) \\ v_y(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ser direkte (som tidligere) at $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{0}$

og at

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2\Omega v_y \\ 2\Omega v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dermed kan vi sette opp likningene på samme måte.

3 d) Likningen fås direkte ved å gange y-likningen med i og legge sammen de to likningene.

Venstre side:

$$-2\Omega v_y + 2i\Omega v_x = 2\Omega i(v_x + i v_y)$$
$$= 2\Omega i w$$

høyre side:

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + i \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

3e)

Til forskjell fra tidligere tenker vi her at $z = -\infty$ er løsningen mot bunnen

Her er

$$\lim_{z=-\infty} V_x = \lim_{z=-\infty} V_y = 0$$

Gitt at

$$w = C_1 e^{\beta z} e^{i\beta z} + C_2 e^{-\beta z} e^{-i\beta z}$$

må $C_2 = 0$ for at

$$\lim_{z=-\infty} V_x = \lim_{z=-\infty} V_y = 0$$

Det gjenstår å bestemme C_1

$$\frac{\partial v_x}{\partial z}(0) = \tau_w / \mu \qquad \text{og}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z}(0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} w \Big|_{z=0} = \partial_z u(0) + i \partial_z v(0) = \frac{\tau_w}{\mu}$$

Dessuten

$$\frac{\partial}{\partial z} w = C_1 \beta (1+i) e^{\beta z} e^{i\beta z}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{\tau_w}{\mu \beta (1+i)} = \frac{\tau_w (1-i)}{2 \mu \beta}.$$

Videre må β bestemmes

$$\nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} w = \frac{\tau_w (1-i)}{2\rho\beta} \left(\beta^2 (1+i)^2\right) e^{\beta z} e^{i\beta z}$$

$$= \beta^2 (1+i)^2 w = 2i\beta^2 w$$

Ettersom (12) skal være gyldig må

$$2i\beta^2 w = 2\Omega i w$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\Omega}$$

For å finne vinkelen så trenger vi først et utrykk for $\vec{v}$

Ettersom v_x er realdelen og v_y er imaginær delen så er

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\tau_w}{2\mu\sqrt{\Omega}} (\vec{e}_x - \vec{e}_y)}$$

vinkelen er således

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_x \tau_w}{|\vec{v}|\,|\vec{e}_x \tau_w|}$$

$$= \frac{\tau_w^2 / (2\mu\sqrt{\Omega})}{\tau_w^2 / (\sqrt{2}\mu\sqrt{\Omega})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$$