Løsningsforslag MEK2200 H23

1)

Oppgave 1

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{pmatrix}$$

1 a) Regn ut $\nabla \cdot \nabla \times \vec{u}$

I utgangspunktet vet vi at

$\nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = 0$ for alle $\vec{u}$.

La $\vec{u} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \partial/\partial z \\ f & g & h \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} h - \frac{\partial}{\partial z} g \\ -\left(\frac{\partial}{\partial x} h - \frac{\partial}{\partial z} f\right) \\ \frac{\partial}{\partial x} g - \frac{\partial}{\partial y} f \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = {} & \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} h - \underline{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} g} \\
& - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} h \quad \boxed{+ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} f} \\
& \underline{+ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} g} \quad \boxed{- \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} f}
\end{aligned}
$$

I og med at $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} g = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} g$

så ser vi at alle ledd faller.

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = 0 \quad \blacksquare$$

Oppgaven kan selvfølgelig gjøres i det konkrete tilfelle

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{pmatrix}$$ for full pott.

Oppgave 1 b)

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + (\nabla u)^T\right)$$

Det er litt ulike tradisjoner på hvordan $\nabla\vec{u}$ skal nummeres.

Her bruker vi

$$\nabla\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_j} u_i$$

med i som rad- og j som kolonne index. Altså

$$\nabla\vec{u} = \begin{pmatrix} 2x & & \\ & 3y^2 & \\ & & 4z^3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2x & & \\ & 3y^2 & \\ & & 4z^3 \end{pmatrix}}}$$

1 c) 4)

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_i$$

$$= 2x + 3y^2 + 4z^3$$

$$\nabla \nabla \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6y \\ 12z^2 \end{pmatrix}$$

1 d)

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} 2x & & \\ & 3y^2 & \\ & & 4z^3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6y \\ 12z^2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2)

$Ax=b$

En likning er linjær dersom vi samler alle termer som involverer den ukjente på venstre side og sjekker følgende

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

I vårt tilfelle er $b=0$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha_1 u_1) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha_2 u_2)$$

$$- c^2\nabla^2(\alpha_1 u_1) - c^2\nabla^2(\alpha_1 u_2)$$

$$= \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 - \alpha_1 c^2 \nabla^2 u_1$$

$$+ \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2 - \alpha_2 c^2 \nabla^2 u_2$$

$$= \alpha_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) u_1$$

$$+ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) u_2$$

$\blacksquare$

b) Vi har i kurset løst at typiske løsninger har formen

$$f(x - ct) + g(x + ct)$$

Det er lett å vise at $f(x-ct)$ og $g(x+ct)$ oppfyller likningen. La f.eks $z = x - ct$

Da v.1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial z}$$

Dermed v.1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 f = 0.$$

Det samme gjelder for g.

I tillegg vi funksjoner på formen

$$a + bx + ct$$

tilfredstille likningen da dobbelderivasjon enten i rom eller tid fjerner alle 3 termer.

Initialbetingelse $(t = 0)$

gjør dog at $a, b = 0$.

Dermed er løsningen

~~$u(x,t) = \alpha \sin (x$~~

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \alpha \sin(x-ct) + \beta \sin(x+ct) \\ &\quad + ct \\ &\text{hvor } \alpha + \beta = 1. \end{aligned}}$$

Oppgave

3a)

Newton's 2. lov sier

$\vec{F} = m\vec{a}$

For et legme Ω

så vil $\vec{F}$ være

volum- og overflate-krefter

Volum $\vec{F}_v = \int_{\Omega} \vec{f}_v \, dx$

Overflate $\vec{F}_o = \int_{\partial\Omega} \vec{f}_o \, ds$

$$m\vec{a} = \int_{\Omega} \rho \vec{a} \, dx$$

Cauchy kom frem

til at

$$\int_{\partial\Omega} f_0 \, ds = \int_{\partial\Omega} \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n} \, ds$$

hvor $\underset{\rightarrow}{P}$ er stress tensoren.

Dessuten har vi

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} \, dx = \int_{\partial\Omega} \underset{\rightarrow}{P} \cdot \vec{n} \, ds$$

Dermed :

$$\int_{\Omega} \rho \vec{a} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \, dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} \, ds$$

I og med at Ω er vilkårlig

vil det gjelde for hvert punkt

$\Longrightarrow$

Generelt altså

$$\rho \vec{a} = \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} + \vec{f}$$

eller om vi skalerer $\underset{\rightarrow}{P}$ og $\vec{f}$

med ρ $\left(\underset{\rightarrow}{P}' = \underset{\rightarrow}{P}/\rho \text{ og } \vec{f}' = \vec{f}/\rho\right)$

så ender vi opp med

$$\vec{a} = \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P}' + \vec{f}'$$

Oppgave 3 b)

$$\vec{P} = \vec{\sigma} = 2\mu \vec{\varepsilon} + \lambda \, \mathrm{tr} \, \vec{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot (2\mu \varepsilon) = 2\mu \, \nabla \cdot \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right)$$

$$= \underbrace{\mu \nabla^2 u}_{\text{ok}} \quad \underbrace{+ \mu \, \nabla \cdot (\nabla u)^T}_{\text{må jobbes litt mer med}}$$

$$\mu \, \nabla \cdot (\nabla u)^T = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

$$= \underline{\mu \nabla \nabla \cdot \vec{u}}$$

3b) Fortsettelse

Vi har altså at

$$\nabla \cdot \underset{\rightarrow}{P} = \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{\sigma} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u}$$

Dessuten, for små deformasjoner

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \vec{f}$$

Oppgave 4

4a)

I Hagen-Poiseuille's tilfelle

er strømningen:

1. trykkdrevet $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial z} = -\beta$
2. stasjonær $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
3. laminær

↳ som vi argumentasjon fører

til at $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = 0$

Argumentasjon er at

~~parallelle~~ ~~strømlatig~~ strømlinjene

er rette og dermed

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(r) \end{pmatrix}$$

Vi står igjen

med

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{v}$$

som skrives med cylinder koordinater

hvor $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)$ i dette

tilfelle.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr} u\right) = \frac{\beta}{\mu}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr} u\right) = \frac{\beta r}{\mu}$$

$$\Rightarrow \quad r \frac{d}{dr} u = \int \frac{\beta r}{\mu} = \frac{\beta}{\mu}\frac{r^2}{2} + A$$

$$\frac{d}{dr} u = \frac{\beta}{\mu}\frac{r}{2} + \frac{A}{r}$$

$$u = \frac{\beta}{\mu}\frac{r^2}{4} + A \log r + C$$

$u(0)$ er endelig

mens $\log(0) = -\infty$

Dermed $A = 0$.

Videre bc $u(R) = 0$

$$\rightarrow \quad u(r) = \frac{\beta}{4\mu}(R^2 - r^2)$$

$$\boxed{\text{Altså} \quad A = \frac{\beta}{4\mu}}$$

Skjærspenning

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r)\Big|_{r=R} = -\frac{2\beta}{4\mu} r$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\beta}{\mu} R$$

Oppgave 4)

d)

$$Q = 2\pi \int_0^R r\, u \, dr$$

$$= 2\pi \frac{\beta}{4\mu} \int_0^R \left(R^2 r - r^3\right) dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi \beta}{\mu} \left[\frac{1}{2} R^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_0^R$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi \beta}{\mu} \frac{1}{4} R^4$$

$$\boxed{= \frac{1}{8} \frac{\pi \beta}{\mu} R^4}$$