Løsningsforslag eksamen MEK2200 høst 2016

Oppgave 1

a)

Fra teksten kan vi lese at

a) Strømningen er stasjonær, slik at $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$

b) $\mathbf{v} = v_z(r)\mathbf{i}_k$ som gir at strømningen er rettlinjet $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (dette skal vises)

c) Inkompressible væske $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (dette skal vises)

d) Newtonsk væske $\sigma = -Ip + 2\eta\dot{\varepsilon}$

e) $\nabla p = \beta$ (her burde det stått $\nabla p = \beta \mathbf{i}_k$ i oppgaven!)

I formelarket har vi Navier-Stokes for en inkompressible Newtonsk væske gitt ved

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \tag{1}$$

Vi antar at det ikke virker noen eksterne krefter på strømningen, i.e $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, dermed kan vi (etter å ha vist punktene a, b og c) enkelt forenkle Eq. **??** til

$$\eta \nabla^2 \mathbf{v} = \beta \tag{2}$$

I sylinderkoordinater blir dette

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \beta \tag{3}$$

Vi integrerer denne differensialligningen.

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\beta}{2\eta} r + \frac{C}{r} \tag{4}$$

Vi må ha at $C = 0$, ellers får en singularitet ved $r = 0$. Dette gir ved integrasjon

$$v(r) = \frac{\beta}{4\eta} r^2 + D \tag{5}$$

Vi bruker no-slip grensebetingelsen, i.e $v(b) = 0$. Dermed får vi at

$$v(b) = 0 \rightarrow D = -\frac{\beta}{4\eta} b^2 \tag{6}$$

Dette gir

$$v(r) = \frac{\beta}{4\eta}\left(r^2 - b^2\right), \tag{7}$$

som kan skrives som

$$v(r) = \frac{-\beta b^2}{4\eta}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \qquad\qquad v(r) = v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right). \tag{8}$$

b)

Vi bruker uttrykket

$$P_{ij} = -\mathrm{I}p + 2\eta\dot{\varepsilon} \tag{9}$$

til å beregne stresstensoren. Vi beregner tøyningstensoren i sylinderkoordinater til å være (oppgitt i formel-arket)

$$\dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r}\left(i_z i_r + i_z i_r\right) = \frac{1}{4}\frac{\beta}{\eta} r \left(i_z i_r + i_z i_r\right) \tag{10}$$

Dette gir

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \frac{1}{2}\beta r \\ 0 & -p & 0 \\ \frac{1}{2}\beta r & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{11}$$

Sylinderveggen er gitt ved $r = b$ og har en flatenormalen $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_r$. Pga radiell symmetri holder det å se på spenningen for en konkret vinkel. La oss velge 180 grader, hvor normal-vektoren er $(-1, 0, 0)$ (alternativet er $(cos\theta, sin\theta, 0)$). Dette gir

$$P_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p & 0 & \frac{1}{2}\beta b \\ 0 & -p & 0 \\ \frac{1}{2}\beta b & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$P_n = \begin{pmatrix} p & 0 & \frac{1}{2}\beta b \end{pmatrix} \tag{13}$$

Normalspenningen blir

$$P_{nn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P_n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 & \frac{1}{2}\beta b \end{pmatrix} = -p, \tag{14}$$

alstå trykk inn mot veggen. Skjærspenningen er gitt ved

$$P_{tn} = |P_n \times \mathbf{n}| \tag{15}$$

som gir

$$P_{tn} = | \begin{pmatrix} p & 0 & \frac{1}{2}\beta b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -i_r & 0 & 0 \end{pmatrix} | = \frac{1}{2}\beta b \tag{16}$$

Vi kunne også beregnet skjærspenningen ved å bruke

$$\tau = \eta \frac{\partial v(r=b)}{\partial r} \qquad \text{eller} \qquad P_{nt_k} = P_n \cdot \mathbf{t}_k, \quad \mathbf{t}_1 = [0,1,0], \mathbf{t}_2 = [0,0,1] \tag{17}$$

c)

Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} \int_0^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \tag{18}$$

Vi bruker sylinderkoordinater til å integrere over et tverrsnitt, som gir

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^b v \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \tag{19}$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{-\beta b^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \tag{20}$$

$$Q = \frac{-2\pi\beta b^2}{4\eta} \int_0^b \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) r \mathrm{d}r \tag{21}$$

$$Q = \frac{-2\pi\beta b^2}{4\eta} \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{r^4}{4b^2}\right]_0^b \tag{22}$$

$$Q = \frac{-2\pi\beta b^2}{4\eta} \left(\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{4} b^2\right) = \frac{-\pi\beta b^4}{8\eta} \tag{23}$$

Oppgave 2

a og b)

Naviers ligning er gitt ved

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \tag{24}$$

Gitt at dette er en en-dimensjonal kompresjonsbølge (her manglet det opplagt en t i oppgaveteksten)

$$\mathbf{u} = [u(x,t),\ 0,\ 0)] \tag{25}$$

Så kan vi sette inn for $\mathbf{u}$, slik at vi får (her skal studentene ta med alle detaljer)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26}$$

Vi kan se at

$$c = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}} \tag{27}$$

Konstanten c er høyst sansynlig reel, siden μ og ρ må være positive og λ er det for de aller fleste materialer.

c)

La oss sette

$$u = A \sin(k(x \pm ct)) + B \cos(k(x \pm ct)) \tag{28}$$

som er det samme som oppgaven med A og B lik 1 eller 0. Dermed har vi at

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \pm Akc \cos(k(x \pm ct)) \mp Bkc \sin(k(x \pm ct)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -(kc)^2 A \sin(k(x \pm ct)) - (kc)^2 B \cos(k(x \pm ct)) \end{aligned} \tag{29}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= kA \cos(k(x \pm ct)) - kB \sin(k(x \pm ct)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k^2 A \sin(k(x \pm ct)) - k^2 B \cos(k(x \pm ct)) \end{aligned} \tag{30}$$

Vi sjekker om bølgeligningen er oppfylt

$$-(kc)^2 [A \sin(k(x \pm ct)) + B \cos(k(x \pm ct))] \tag{31}$$

$$= \tag{32}$$

$$-k^2 c^2 [A \sin(k(x \pm ct)) + B \cos(k(x \pm ct))] \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{34}$$

Vi ser dermed at vår antakelse $u = A\sin(k(x \pm ct)) + B\cos(k(x \pm ct))$ stemmer for alle verdier av A og B og vilkårlig fortegn foran ct.

d)

Den elastiske energien pr. masseenhet er gitt ved

$$E = \frac{1}{\rho}\left(\lambda \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{2} + \mu \varepsilon_{ij}^2\right) \tag{35}$$

Vi har at $u = (u(x,t),\ 0,\ 0)$, dermed vil vi få

$$\varepsilon_{ij}^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad \nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{36}$$

Slik at den elastiske energien kan skrives som

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{37}$$

Hvis $u = A\sin(k(x \pm ct)) + B\cos(k(x \pm ct))$, så vil dette gi

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)k^2\left(A\cos(k(x \pm ct)) - B\sin(k(x \pm ct))\right)^2 \tag{38}$$

e)

Sjekker om

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{39}$$

er linjær mhp w. La $w = \alpha u + \beta v$. Husker at for en linear funksjon/likning så vil

$$F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v).$$

Dermed,

$$F(w) = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})(w)$$

blir

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})(\alpha u + \beta v)$$

og kan skrives

$$(\frac{\partial^2 \alpha u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \alpha u}{\partial x^2}) + (\frac{\partial^2 \beta v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \beta v}{\partial x^2})$$

og ettersom derivasjon er en linjær operasjon blir dette

$$\alpha(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})u + \beta(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})v$$

som da blir

$$\alpha F(u) + \beta F(v).$$

Oppgave 3

a)

Vi skal forenkle

$$P_{ij} = a x_i x_j + b x_k \delta_{ik} b x_l \delta_{jl}, \quad 0 < i, j, k, l < 4. \tag{40}$$

Vi har at

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad i = j \\ 0 & \text{hvis} \quad i \neq j \end{cases}. \tag{41}$$

slik at vi kan forenkle

$$b x_k \delta_{ik} b x_l \delta_{jl} = \begin{cases} b^2 x_i x_j & \text{hvis} \quad j = l \quad \text{og} \quad i = k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{42}$$

Dermed får vi

$$P_{ij} = \left(a + b^2\right) x_i x_j, \quad 0 < i, j, k, l < 4. \tag{43}$$

b)

$$\begin{aligned} P_{11} &= \left(a + b^2\right) x^2 \\ P_{12} &= \left(a + b^2\right) xy \\ P_{13} &= \left(a + b^2\right) xz \end{aligned} \tag{44}$$

c)

$$\nabla \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left(a + b^2\right) \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\nabla \cdot P = \left(a + b^2\right) \begin{pmatrix} 2x + x + x, & y + 2y + y, & z + z + 2z \end{pmatrix} = 4\left(a + b^2\right) \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \tag{46}$$

d)

$$\nabla \times \nabla \cdot P = \nabla \times 4\left(a + b^2\right)\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = 0 \tag{47}$$

e)

Translasjon og rotatsjon er stive bevegelser som ikke gir noe spenning, dermed er det $P_{ij} = 0$ som er det rette svaret.