UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK2200 — Kontinuumsmekanikk
Eksamensdag:	Torsdag 20. desember 2018
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 30%)

1a

Utled bevegelses- og kontinuitetslikningen for et vilkårlig kontinuerlig medium. Forklar hvilke fysiske lover som ligger til grunn.

1b

Med utgangspunkt i 1a, utled bevegelseslikningen for en inkompressibel Newtonsk væske. Forklar hvilke antagelser som gjøres.

1c

Med utgangspunkt i 1a, utled bevegelseslikningen for et isotropt lineært elastisk stoff. Forklar hvilke antagelser som gjøres.

Oppgave 2 (vekt 40%)

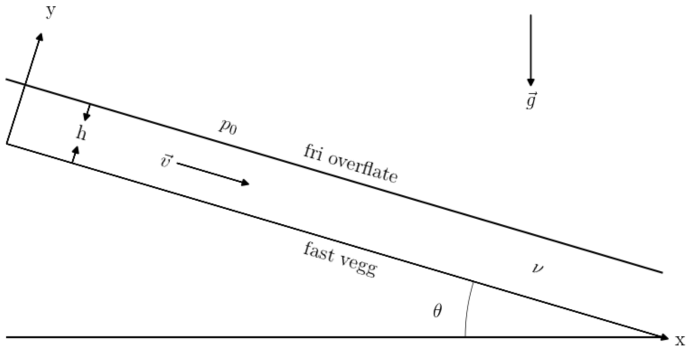
Vi ser på en homogen inkompressibel Newtonsk væske som flyter i et tynt lag ned et skråplan, som skissert i Fig 1. Bevegelsen er stasjonær og rettlinjet, hastigheten $\vec{v}$ er parallell med skråplanet. Væskens kinematiske viskositetskoeffisient er ν og høyden på væskefilmen er h. Trykket ved den frie overflaten er p_0.

2a

Sett opp likningene, inkludert grensebetingelser, som beskriver strømningen. Gjør alle mulige forenklinger og begrunn hvorfor man har et hastighetsfelt på formen

$$\vec{v} = (u(y), 0, 0) \tag{1}$$

(Fortsettes på side 2.)

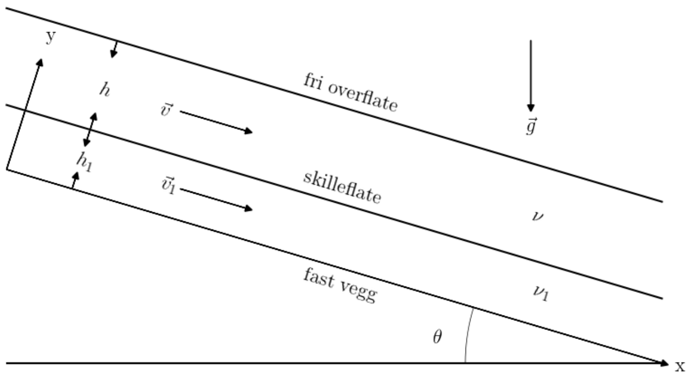


Figur 1: Illustrasjon av viskøs væske som flyter nedover et skråplan.

2b

Finn bevegelsen og volumstrømmen Q_0. Volumstrømmen er det væskevolum som per tidsenhet transporteres gjennom et plan normalt på x-aksen, med bredde lik 1.

Vi antar videre at vi har to væskelag som strømmer nedover skråplanet, som skissert i Fig 2. Både den frie overflaten og skilleflaten mellom de to lagene er parallelle med skråplanet, og tykkelsen på lagene er h_1 og h. Tettheten er den samme i begge lag, men de kinematisk viskositetskoeffisientene er henholdsvis ν_1 og ν. Bevegelsen er fremdeles stasjonær og rettlinjet, hastigheten er parallell med skråplanet og bare avhengig av avstanden til dette planet.



Figur 2: Illustrasjon av 2 lag med viskøse væsker som flyter nedover et skråplan.

(Fortsettes på side 3.)

2c

Sett opp grensebetingelsene ved skilleflaten.

2d

Finn bevegelsen i de to lagene. Skisser hastighetsprofilet. Hvordan blir hastighetsprofilet når $\frac{\nu_1}{\nu} \longrightarrow \infty$?

Oppgave 3 (vekt 30%)

Gitt tensoren

$$\mathcal{P} = a\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{j}\boldsymbol{i} + d(\boldsymbol{j}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k})$$

der $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ er enhetsvektorene i henholdsvis x, y og z-retning, mens a, b, c og d er konstanter.

3a

Gi tensoren $\mathcal{P}$ på matriseform. Hva må forholdet mellom konstantene være for at $\mathcal{P}$ skal kvalifisere som en spenningstensor?

3b

Anta videre at a, b, c og d er funksjoner som varierer i rommet. Er det da flere restriksjoner hvis vi også krever at $\mathcal{P}$ skal gjelde for en viskøs væske i ro (stasjonær), uten ytre påvirkninger? I så fall hvilke?

3c

Anta at $b = c$ og finn prinsipalspenningene og prinsipalretningene til $\mathcal{P}$.

Tilleggsmateriale

Newton's friksjonslov

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \kappa\nabla\cdot\boldsymbol{v}\delta_{ij} + 2\mu\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{v}}{3}\delta_{ij}\right)$$

Hooke's lov

$$P_{ij} = \kappa\nabla\cdot\boldsymbol{u}\delta_{ij} + 2\mu\left(\epsilon_{ij} - \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{3}\delta_{ij}\right)$$

SLUTT