Oppgave 1

a) Det finnes to betingelser for spenningstensoren:

(a) Likevekt av kreftene, som tolkes for eksempel for et medium i ro som

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = -\rho \vec{f}, \tag{1}$$

hvor $\vec{f}$ er volumnkraften

(b) Likevekt av momentene, som tolkes da

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^T \tag{2}$$

Siden vesenet av likevektet (for eksempel statisk likevekt)og ytrekreftene er ukjent er det enigste vi kan kreve at $d = c$ for å ha en gyldig spenningstensor.

b)

$$\vec{P}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{3}$$

c)

$$P_{nn} = \vec{n} \cdot \vec{P}_n = \frac{1}{2}(a+b) \tag{4}$$

$$P_{tn}^2 = |\vec{P}_n|^2 - P_{nn}^2 \tag{5}$$

$$|\vec{P}_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{6}$$

$$P_{tn}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - (a+b)^2\right) = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2c^2 - 2ab\right) \tag{7}$$

d)

$$\det \begin{pmatrix} a-\sigma & 0 & c \\ 0 & b-\sigma & 0 \\ c & 0 & -\sigma \end{pmatrix} = -(a-\sigma)\sigma(b-\sigma) - c^2(b-\sigma) \tag{8}$$

$$= (b-\sigma)\left(\sigma^2 - a\sigma - c^2\right) \tag{9}$$

The roots of the characteristic polynomial are

$$\sigma_1 = b \tag{10}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4c^2}\right) \tag{11}$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 + 4c^2}\right) \tag{12}$$

The corresponding eigenvectors (not normalized):

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (0,1,0) && (13)\\
\vec{v}_2 &= (-c,0,a-\sigma_2) && (14)\\
\vec{v}_3 &= (-c,0,a-\sigma_3) && (15)\\
& && (16)
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Vi må anta at strømningen er to dimensionalt, stasjonær og rettlinet parallel med vegene:

$$\vec{u} = u(x,z)\vec{e}_x, \tag{17}$$

Fra kontinuitetsligningen har vi at:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

Derfor

$$\vec{u} = u(z)\vec{e}_x, \tag{19}$$

b) For feltet i 19 og $p = 0$ har vi at:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= 0 && (20)\\
\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} &= 0 && (21)\\
\nabla p &= 0 && (22)\\
\nabla^2\vec{u} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\vec{e}_x && (23)
\end{aligned}$$

Derfor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{24}$$

Løsningen er:

$$u(z) = az + b \tag{25}$$

Grensebetingelser:

$$u(z=0) = b = 0 \quad u(z=L) = aL + b = U \tag{26}$$

Derfra

$$u(z) = U\frac{z}{L} \tag{27}$$

c)

$$\mathcal{P} = -pI + 2\mu\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} -p & \mu\frac{U}{L} \\ \mu\frac{U}{L} & -p \end{pmatrix} \tag{28}$$

Nedre platen:

$$\vec{n} = \vec{e}_z \tag{29}$$

$$\vec{P}_n = (\mu\frac{U}{L}, -p) \tag{30}$$

$$P_{nn} = -p \quad P_{nt} = \mu\frac{U}{L}, \tag{31}$$

hvor $\vec{t} = \vec{e}_x$.
Nedre platen føler en kraft i positive x-retning, dvs. draget av fluiden på platen virker mot høyre. Det betyr at det trenges en motkraft for å holde platen i ro.
Øvre platen:

$$\vec{n} = -\vec{e}_z \tag{32}$$

$$\vec{P}_n = (-\mu\frac{U}{L}, p) \tag{33}$$

$$P_{nn} = -p \quad P_{nt} = -\mu\frac{U}{L}, \tag{34}$$

hvor $\vec{t} = \vec{e}_x$.
Øvre platen føler en kraft i negativ x-retning, dvs. draget av fluiden på platen virker mot venstre. Det betyr at det trenges en motkraft for å bevege øvre platen til høyre.

d) I dette tilfellet har vi i Navier-Stokes ligningene at

$$\nabla p = \beta\vec{e}_x \tag{35}$$

Og dermed fra b) finner vi at:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\beta}{\mu} \tag{36}$$

Løsningen er:

$$u(z) = \frac{\beta}{\mu}\frac{1}{2}z^2 + az + b \tag{37}$$

Grensebetingelser:

$$u(z=0) = b = 0 \quad u(z=L) = \frac{\beta}{2\mu}L^2 + aL + b = U \tag{38}$$

Derfra

$$u(z) = U\frac{z}{L} + \frac{\beta}{2\mu}\left(z^2 - Lz\right) \tag{39}$$

e)

$$Q = \int_0^L u(z)\,dz \tag{40}$$

$$= U\frac{L}{2} - \frac{\beta}{12\mu}L^3 \tag{41}$$

Da har vi at

$$Q = \begin{cases} > 0 & \text{hvis}\beta < 6\mu U/L^2 \\ < 0 & \text{hvis}\beta > 6\mu U/L^2 \end{cases} \tag{42}$$

Oppgave 3

1. a) Vi har at:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[P_{xx} - \nu\left(P_{yy} + P_{zz}\right)\right] \tag{43}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[P_{yy} - \nu\left(P_{xx} + P_{zz}\right)\right] \tag{44}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[P_{zz} - \nu\left(P_{xx} + P_{yy}\right)\right] \tag{45}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}P_{xy} \tag{46}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E}P_{xz} \tag{47}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}P_{yz} \tag{48}$$

Derfra finner vi gitt vår spenningstensor at:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}P_{zz} \tag{49}$$

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}P_{zz} \tag{50}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}P_{zz} \tag{51}$$

$$\epsilon_{xy} = 0 \tag{52}$$

$$\epsilon_{xz} = 0 \tag{53}$$

$$\epsilon_{yz} = 0 \tag{54}$$

b) Fra ligningene (49-51), får vi:

$$u = -\frac{\nu\sigma}{E}x + \alpha(y,z) \tag{55}$$

$$v = -\frac{\nu\sigma}{E}y + \beta(x,z) \tag{56}$$

$$w = \frac{\sigma}{E}z + \gamma(x,y) \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

Da blir (52-54):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x} = 0 \qquad (59)$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0 \qquad (60)$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0 \qquad (61)$$

Vi deriverer (59) med hensikt til z, (60) med hensikt til y og (61) med hensikt til x og får da:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z} = 0 \qquad (62)$$
$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y} = 0 \qquad (63)$$
$$\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial y\partial x} = 0 \qquad (64)$$

Vi substraherer (63) fra (62) osv og finner:

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y} = 0 \qquad (65)$$
$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial y\partial x} = 0 \qquad (66)$$
$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z} = 0 \qquad (67)$$

Derfra kommer vi til:

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} = a(y,z) \qquad (68)$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} = b(x,z) \qquad (69)$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = c(x,y) \qquad (70)$$

Sammen med (59-61) finner vi da:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{1}{2}c(x,y) \qquad (71)$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \frac{1}{2}b(x,z) \qquad (72)$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = -\frac{1}{2}c(x,y) \qquad (73)$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = -\frac{1}{2}a(y,z) \qquad (74)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -\frac{1}{2}b(x,z) \tag{75}$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = -\frac{1}{2}a(y,z) \tag{76}$$

Nå er α per definisjon ikke en funksjon av x slik at c kan bare være en funksjon av y, men på den andre siden er β per definisjon ikke en funksjon av y. Derfor må c være konstant. På den samme måte har vi:

$$a = a_0 \quad b = b_0 \quad c = c_0. \tag{77}$$

Integrasjon gir oss for forskyvingene til syvende og sist:

$$u = -\frac{\nu\sigma}{E}x + \frac{1}{2}\left(c_0 y + b_0 z\right) + k_1 \tag{78}$$
$$v = -\frac{\nu\sigma}{E}y + \frac{1}{2}\left(-c_0 x + a_0 z\right) + k_2 \tag{79}$$
$$w = \frac{\sigma}{E}z + \frac{1}{2}\left(-b_0 x - a_0 y\right) + k_3, \tag{80}$$

hvor k_1, k_2 og k_3 er konstanter.

c) Bevegelsen av et stivt legme består av translasjon og rotasjon. Angående translasjon, så har vi betingelsen at forskyvingen av origo må være null, slik at

$$(u,v,w)(x=0,y=0,z=0) = (k_1,k_2,k_3) = (0,0,0). \tag{81}$$

Vi har bare strekkning av tauet, slik at det finnes ikke noe rotasjon av planet med $z=0$ rundt x, y og z aksen. Derfor har vi:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} = c_0 = 0 \tag{82}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = b_0 = 0 \tag{83}$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = a_0 = 0 \tag{84}$$
$$\tag{85}$$

Forskyvingsfeltet blir da

$$u = -\frac{\nu\sigma}{E}x \tag{86}$$
$$v = -\frac{\nu\sigma}{E}y \tag{87}$$
$$w = \frac{\sigma}{E}z \tag{88}$$

d)

$$\vec{u}(x,y,z) = -\frac{\nu\sigma}{E}\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\right) + \frac{\sigma}{E}z\vec{e}_z = -\frac{\nu\sigma}{E}r\vec{e}_r + \frac{\sigma}{E}z\vec{e}_z \tag{89}$$

$$w(z=l) = \frac{\sigma}{E} l \tag{90}$$

Therefore

$$l' = l + w(z=l) = \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) l \tag{91}$$

and

$$a' = a - \frac{\nu\sigma}{E} a = \left(1 - \frac{\nu\sigma}{E}\right) a \tag{92}$$

$$A' = \pi a'^2 = \pi a^2 \left(1 - \frac{\nu\sigma}{E}\right)^2 = A \left(1 - \frac{\nu\sigma}{E}\right)^2 \tag{93}$$

2. a) På grunn av kreftelikevekt, må magnituden T av kraften i et av de to delene av tauet være gitt med:

$$T \sin\alpha = T \frac{H}{L'} = \frac{Mg}{2}, \tag{94}$$

hvor

$$L' = \sqrt{L^2 + H^2} \tag{95}$$

er lengden av halvparten av tauet etter deformasjon. Som før antar vi at spenningen σ er konstant over arealet av tauet. Derfra:

$$M = 2 \frac{T}{g} \frac{H}{L'} = 2\sigma \frac{A}{g} \frac{H}{L'} \tag{96}$$

Hvis vi løser ligning (91) for σ og plugger resultatet inn i (96) får vi:

$$M = 2 \frac{E}{g} \left(\frac{L'}{L} - 1\right) \frac{H}{L'} A \tag{97}$$

b) Lampene er laget av Carbon. Fordi hvis de hadde vært laget av et materiale som fantes på østkanten, så hadde det tydet på at skjelmen kommer derfra og det hadde vært politisk ukorrekt.