UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK2200 — Kontinuumsmekanikk

Eksamensdag: Torsdag 28. november 2019.

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Rottman: Mathematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes. Svar som f.eks ja/nei eller venstre/høyre teller ikke som svar. Vektorer er her skrevet som boldface. Tensorer er i caligrafisk font.

Oppgave 1

La $\boldsymbol{u} = u_i \mathbf{i}_i$. Finn enkle uttrykk for

(10 poeng) a) $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{u}$,

(10 poeng) b) $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$,

(10 poeng) c) $\nabla^2 \boldsymbol{u}$.

Oppgave 2

(10 poeng) a) Bevegelseslikningen på generell form kan skrives som $\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathcal{P} + \mathbf{f}$. Vis argumentasjonen som leder frem til dette uttrykket.

(10 poeng) b) Navier-Stokes for en Newtonsk inkompressibel fluid kan skrives

$$\varrho(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{2}$$

Vis argumentasjonen som leder frem til dette uttrykket. Du kan anta at

$$\mathcal{P}_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}$$

og

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}).$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven se på trykkdrevet strømning mellom to plater som beveger seg. Anta at trykkgradienten er β, hastigheten på begge plater er α i x-retning. Vi antar at avstanden mellom platene er h og at nedre plate er $y = 0$. Vi betrakter dette fenomenet i 2D. Anta stasjonær, inkompressibel, laminar (rettlinjet) strømning.

(10 poeng) a) Argumenter for at strømningsprofilen er på formen $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ hvor $v_x = Ay^2 + By + C$ og at $v_x(0) = v_x(h) = \alpha$.

(10 poeng) b) Finn A, B, og C.

(10 poeng) c) Finn α, β slik at $Q = \int_0^h v_x \, dy = 0$.

(10 poeng) d) Fins det løsninger hvor skjærspenning på øvre og nedre plate sammenlagt er null?

Oppgave 4

La B være enhetskvadratet med hjørner (0,0), (1,0), (0,1) og (1,1) og la τ være spenningstensorentensor som gjelder i B og er på formen

$$\tau = \begin{bmatrix} x & -y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

(10 poeng) a) Finn uttrykkene for punktvis normalspenning og skjærspenning langs flatene $y = 1$ og $x = 1$.

(10 poeng) b) Regn ut den totale spenningskraften på B.

(10 poeng) c) Regn ut prinsipalspenninger og prinsipalretninger i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(10 poeng) d) Et kvadrat C som i utgangspunktet er spenningsfritt flyttes fra (0,0), (1,0), (0,1) og (1,1) til (1,0), (2,0), (1,1) og (2,1). Regn ut forskyvning, forskyvningsgradient, tøyning, og spenning.