UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK2200 — Kontinuumsmekanikk
Eksamensdag:	Mandag 11. desember 2023.
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottman: Mathematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes. Svar som f.eks ja/nei, 0 eller π teller ikke som svar. Som i boken brukes boldface på vektorer ($\mathbf{u}$) og caligrafisk på tensorer $\mathcal{P}$ eller som σ, ε.

Oppgave 1.

La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{bmatrix}$$

Regn ut

a) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}$

b) $\varepsilon(\mathbf{u})$

c) $\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}$

d) $\nabla \cdot \nabla\mathbf{u}$

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

a) Vis at likningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \tag{1}$$

er linjær.
b) Vi ser på likningen i 1D. La initial betingelsen være $sin(x)$. Hva er løsningen ved tid t?

Oppgave 3.

Newton´s 2. lov i kontinuum mekanikk er generelt på formen

$$\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathcal{P} + \mathbf{f} \tag{2}$$

a) utled (2)
b) utled følgende versjon av Newton´s 2 lov

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

Hooke´s lov er på formen

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda tr(\varepsilon(\mathbf{u}))$$

Her er ρ materialets tetthet, μ og λ de to Lame parameterene, tr er trasen (summen av diagonalen) til en tensor mens ε er den symmetriske gradienten.

Oppgave 4.

I denne oppgaven gå gjennom Hagen-Poiseuille´s berømte utregning. Navier-Stokes likninger for en inkompressibel, Newton´s væske kan skrives:

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4}$$

a) Argumenter for at likningen for rørstrømning reduseres til

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Her er likningen beskrevt i sylinderkoordinater (r, θ, z).
b) Vis at løsningen er på formen $u(r) = A(R^2 - r^2)$ hvor R er sylinderens radius. Bestem A.
c) Hva er skjærspenningen ved $r = R$?
d) Hva er volumstrømmen?

SLUTT