UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3220 — Viskøse væsker og elastiske medier.
Eksamensdag:	Torsdag 2. desember 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100.

Oppgave 1 (vekt 50%)

I et isotropt elastisk medium antar vi et forskyvningsfelt,

$$\mathbf{u} = u(x,t)\mathbf{i},$$

der $\mathbf{i}$ er enhetsvektoren som er rettet i x-retning.

1a (vekt 10%)

Vis at u oppfyller likningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

og gi c_L uttrykt ved elastitetskoeffisienter og tetthet.

1b (vekt 10%)

Forklar hvorfor c_L kan tolkes som en bølgehastighet.

1c (vekt 10%)

Finn spenningstensoren, hovedspenningene og retningen(e) som gir maksimal normalspenning. Begrunn svarene.

(Fortsettes på side 2.)

1d (vekt 10%)

Vis at maksimal skjærspenning opptrer på flater der normalen danner vinkelen $\frac{\pi}{4}$ med x-aksen og finn denne skjærspenningen. Bruk Cauchys relasjoner og ikke, for eksempel, Mohrs sirkel. Det spørres ikke etter retningen på skjærspenningen.

1e (vekt 10%)

Deformasjonstensoren er

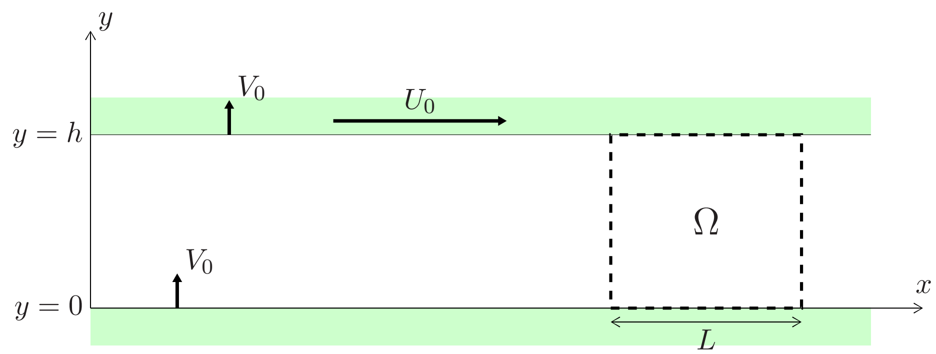
$$\mathcal{E} = \{\epsilon_{ij}\} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}.$$

I utledningen av bevegelseslikningen for et elastisk stoff trenger vi identiteten

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u} \right).$$

Vis denne.

Oppgave 2 (vekt 50%)



Mellom to porøse lag har vi en homogen væske med konstant tetthet ρ og kinematisk viskositet ν. Avstanden mellom lagene er h (se figur). Siden lagene er porøse kan det strømme væske gjennom dem. Samtidig beveger det øvre laget seg i x-retning. Vi definerer hastigheten i væsken som $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ og antar randbetingelsene

Nedre rand,	$y = 0$:	$u = 0$,	$v = V_0$,	$p = p_0$,
Øvre rand,	$y = h$:	$u = U_0$,	$v = V_0$,	

der U_0, V_0 og p_0 er konstanter. Det virker ingen ytre krefter på væsken.

2a (vekt 10%)

Anta stasjonær strømning og at hastigheten i fluidet har formen $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + V_0\mathbf{j}$. Vis at u ikke kan avhenge av x.

(Fortsettes på side 3.)

2b (vekt 10%)

Bestem trykk og hastighet i væsken. Vær oppmerksom på at det konvektive leddet ikke blir null.

2c (vekt 10%)

Vi betrakter energitransport inn i det rektangulære området Ω. Som anvist i figuren har dette bredde L, i x retning, og utspenner hele høyden, h, av væskelaget. Vi regner alle en energistørrelser per bredde i z-retning.
Finn skjærspenningen på planet $y = h$ og arbeid per tid som planet ved $y = h$ utfører på væsken i Ω.

2d (vekt 10%)

Beregn transporten inn i Ω av kinetisk energi per tid gjennom flatene $y = 0$ og $y = h$ på grunn av væskegjennomstrømningen.

2e (vekt 10%)

Vis at den totale mekaniske energien som tilføres Ω er positiv. Forklar (med ord) hva denne energien går med til.

SLUTT