MEK2200: Løsningsforslag eksamen 2019

28.11.2019

1 Oppgave 1

La $\mathbf{u} = u_i \mathbf{i}_i$ og $\nabla = \mathbf{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.
a) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$ bør være kjent, men utregninger skal inkluderes. Man kan benytte seg av Levi-Civita tensoren, men det er litt kronglete. Uansett, vi har

$$\nabla \times \mathbf{u} = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2})$$

som altså er en vektor. Deretter, uttrykket $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}$ er en skalar som involverer sum av deriverte (divergensen) av uttrykket over. For å komme frem til at $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$ må man benytte seg av at $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$ under summeringen.
b) Det letteste her er å regne ut $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ først. Altså:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = (u_i \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = (u_i \frac{\partial}{\partial x_i}).$$

Uttrykket er altså en skalar operator. Dermed,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \mathbf{i}_k$$

som igjen er en vektor.
c) $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} == \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \mathbf{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \mathbf{i}_k = (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_k \mathbf{i}_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i} \mathbf{i}_k$

2 Oppgave 2

a) Se Gjevik kap.4.4. Bevegelsesligning - Newtons 2.lov. Må vise at spenningskrefter kommer av delvis integrasjon med opphav i spenningskrefter per overflate.
b) Bevegelsesligning

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{f} \tag{1}$$

Kontinuitetsligning - konservering av masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

Der $\mathbf{a}$ er akselerasjonsvektor, ρ er tetthet, $\mathbf{P}$ er spenningstensor, $\mathbf{f}$ er vektor av ytre volumkrefter og $\mathbf{v}$ er hastighetsvektor.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \tag{3}$$

Sentralt her er at $\mathbf{v}$ er på formen $\mathbf{v}(x, t)$ og at derivering via kjerneregel gir nettopp formen (**??**).

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \tag{4}$$

Dersom vi setter (3) og (4) inn i (1) får vi direkte første del av Navier-Stokes likninger,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} \tag{5}$$

dersom man observerer at

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^T &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(0) = 0. \end{aligned}$$

Videre forenkles (2) til $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ dersom ρ er konstant.

3 Oppgave 3

Strømningen beskrives av Navier-Stokes ligninger, der $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{7}$$

Siden strømningen er stasjonær, så forsvinner $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ og $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Siden tettheten er konstant forenkles (7) til

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{8}$$

Det er ingen bevegelse i z-retning ($v_z = 0$), så vi får

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

Siden strømningen er rettlinjet, har vi også at $v_y = 0$, og dermed at $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$. Fra dette følger at v_x er kun en funksjon av y, dvs. $v_x(y)$.
Har funnet at $\mathbf{v} = (v_x(y), 0, 0)$. Navier-Stokes ligning i x-retning blir

$$\mathbf{v} \cdot \nabla v_x = \nu \nabla^2 v_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f_x \tag{10}$$

Gradienten $\nabla v_x = (0, \frac{\partial v_x(y)}{\partial y}, 0)$, derfor $(v_x, 0, 0) \cdot (0, \frac{\partial v_x(y)}{\partial y}, 0) = 0$. Det er ingen ytre volumkrefter ($\mathbf{f} = 0$) og fra oppgaven vet vi at trykkgradienten $\frac{\partial p}{\partial x} = \beta$. Og vi sitter igjen med

$$0 = \nu \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} - \frac{\beta}{\rho} \tag{11}$$

Integrerer to ganger og får hastighet på formen

$$v_x(y) = Ay^2 + By + C \tag{12}$$

Grensebetingelsene følger av at det er no-slip langs platene.
b) Grensebetingelser $v_x(0) = v_x(h) = \alpha$. Fra (12) får vi at $A = \frac{\beta}{2\mu}$ og setter inn grensebetingelser

$$v_x(0) = C = \alpha, \quad v_x(h) = Ah^2 + Bh + C = \alpha \tag{13}$$

Og vi får at $B = -\frac{\beta}{2\mu}h$.
c) Srtømningsprofilen er

$$v_x(y) = \frac{\beta}{2\mu}(y^2 - hy) + \alpha \tag{14}$$

Finner volumstrømmen

$$Q = \int_0^h v_x(y)dy = \int_0^h (\frac{\beta}{2\mu}(y^2 - hy) + \alpha)dy = \big(\frac{\beta}{2\mu}(\frac{y^3}{3} - \frac{hy^2}{2}) + \alpha y\big)\Big|_0^h = \alpha h - \frac{\beta h^3}{12\mu} \tag{15}$$

For at volumstømmen er lik 0, bør $\alpha = \frac{\beta h^2}{12\mu}$
c) Dette spørsmålet kan tolkes på flere måter og svaret avhenger av hva man tenker på som retningen til skjærspenningen. Fra et fysisk ståsted er skjærspenning et uttrykk for friksjon. Det vil alltid være friksjon dersom fluid hastighet er ulik hastigheten på planene.

Dersom man derimot definerer skjærspenningensretningen til å være normal på normal vektor slik at $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ mens skjærspenningen er relatert til tangent, feks, $\mathbf{t} = (-n_y, n_x)$ så vil retning på øvre plate være motsatt rettet fra nedre plate. Isåfall får vi

$$\frac{\partial v_x(0)}{\partial y} + \frac{\partial v_x(h)}{\partial y} = B + 2Ah + B = 0 \tag{16}$$

Som tilsvarer den allerede funnet strømningsprofilen. De aller fleste tolker oppgaven på denne måten. Vi gir full pott i begge tilfeller.

4 Oppgave 4

a) Normalvektorer er $\mathbf{n}_1 = \mathbf{j}$ for flaten $y = 1$ og $\mathbf{n_2} = \mathbf{i}$ for flaten $x = 1$. Spenningen på flaten finnes som $\mathbf{P_n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$. Og for $y = 1$,

$$\mathbf{P}_{\mathbf{n}_1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} x & -y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \tag{17}$$

Tilsvarende, for $x = 1$,

$$\mathbf{P_{n_2}} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} \tag{18}$$

Normalspenning er gitt som $\mathbf{P_{nn}} = \mathbf{P_n} \cdot \mathbf{n}$.
For $y = 1$,

$$\mathbf{P_{n_1 n_1}} = (-y, x) \cdot (0, 1) = x \tag{19}$$

For $x = 1$,

$$\mathbf{P_{n_2 n_2}} = (x, -y) \cdot (1, 0) = x \tag{20}$$

Tangensialspenningen er gitt ved $\mathbf{P_{nt}} = \mathbf{P_n} - \mathbf{P_{nn}} \mathbf{n}$.
For $y = 1$,

$$\mathbf{P_{n_1 t_1}} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - x\mathbf{j} = -y\mathbf{i} \tag{21}$$

For $x = 1$,

$$\mathbf{P_{n_2 t_2}} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - x\mathbf{i} = -y\mathbf{j} \tag{22}$$

Størrelsen til $\mathbf{P_{nt}}$ finnes evt finnes fra $|\mathbf{P_{nt}}| = |\mathbf{n} \times \mathbf{P_n}|$. For $y = 1$,

$$|\mathbf{P_{n_1 t_1}}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = |y\mathbf{k}| = |y| \tag{23}$$

For $x = 1$,

$$|\mathbf{P_{n_2 t_2}}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = |-y\mathbf{k}| = |y| \tag{24}$$

b) Kraften som virker på hver sideflate finnes som $\mathbf{F_i} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{P_{n_i}} ds$. Den totale kraften som virker på objektet er $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F_i} = 0$. Den enkleste måten å finne ut av dette på er å regne ut $\nabla \cdot \mathbf{P}$, altså

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Prinsipialspenningsretning bestemmes ved at $\mathbf{P_{nt}} = 0$ Vi kan finne hovedspenningene uavhengig av flater. Har at $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$, der λ er hovedspenninger. Da $(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0$.

$$det|\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \tag{25}$$

$$(x - \lambda)^2 - y^2 = 0 \tag{26}$$

$$\lambda = x \pm y \tag{27}$$

Og for $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vi får $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{n_1} = (-1, 1)$, og $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{n_2} = (1, 1)$. (Hovedretninger er ikke normalisert).
d) Det er stivtlegemebevegelse (forskyvning uten tøyning). Translasjon er i dette tilfelle $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ og enhver derivert blir null. Følgelig gir forflytning ikke noe gradient, tøyning eller spenning. De aller fleste mener at $\mathbf{u} = (x, 0, 0)$ og gjør riktige regninger etter det. Litt usikker på om det skal gi poeng i det hele tatt.