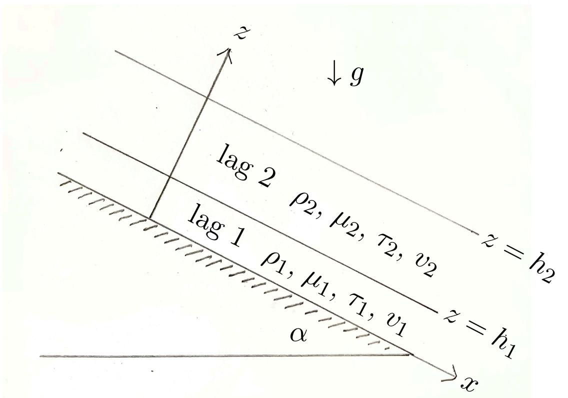
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK2200 — Kontinuumsmekanikk
Eksamensdag:	Mandag 19. desember 2022
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Karl Rottmann: Matematisk formelsamling. Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Elastisk modell av snølag (vekt 30%)



Flakskred består av et snølag der all snøen glir ut samtidig, lag 2 i figuren. Flaket glir langs et løsere lag lenger ned i dekket. Når et flakskred utløses, oppstår et spontant brudd i glidesjiktet, lag 1.

To snølag som hviler på en skråning, modelleres som to isotrope, homogene og lineært elastiske materialer. Lagtykkelsen er konstant for hvert lag. Skråningen, et fast og plant underlag, danner helningsvinkelen α med horisontalen. Tyngdens akselerasjon g virker langs den negative vertikalen.

Et koordinatsystem har akser som vist på figuren. Lag 1 har tykkelse h_1, densitet ρ_1 og skjærspenningsmodul μ_1. Skjærspenningen τ_1 og forskyvningen v_1 er rettet langs x-retning. Tilsvarende størrelser i lag 2 er $h_2 - h_1$, ρ_2, μ_2, τ_2, v_2. Det virker ingen skjærspenning på flaten $z = h_2$. Materialegenskapene har ingen variasjon i x-retningen.

(Fortsettes på side 2.)

a (vekt 10%)

Bestem skjærspenningene τ_1 og τ_2 som funksjon av koordinaten z.

b (vekt 10%)

Bestem forskyvningsfeltene v_1 og v_2.

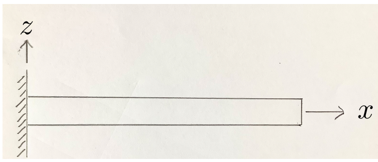
c (vekt 10%)

For flakskred er tabulerte verdier for flytespenningen i glidesjiktet, lag 1, $\tau_{1,flyt}$=2 kPa (kilo-Pascal) der 1 Pa = 1 N/m^2. Flytespenningen i lag 2 er $\tau_{2,flyt}$=10 kPa.

Etter et snøfall estimeres tykkelsen til lag 2 til mellom $h_2 - h_1 = 1.5$ m og $h_2 - h_1 = 2$ m. I denne deloppgaven er tykkelsen til lag 1 liten, dvs. $h_1/(h_2 - h_1) << 1$. Densiteten i lag 2 estimeres til 200 kg/m^3. Densiteten i lag 1 estimeres til 400 kg/m^3. Helningsvinkelen er 30 grader.

Basert på disse opplysningene og beregningene i deloppgave **a** skal du vurdere faren for skred. Vurderingen skal begrunnes.

Oppgave 2 Tøyning av stav i to dimensjoner (vekt 20%)



a (vekt 10%)

Vi antar at en to-dimensjonal stav i xz-planet er fastspent i $x = 0$ og at en kraft $F = qP_{11}$ i x-retningen virker i enden ved $x = l$ der q er tverrsnittet. Spenningen er gitt ved

$$P_{11} = E\epsilon,$$

der E er Youngs modul og ϵ den relative tøyningen. Det er ingen andre spenninger. Anta at tøyningsfeltet har formen

$$u_1(x) = \epsilon x, \quad u_3(z) = \beta z$$

Sett opp den to-dimensjonale tøyningstensoren.

Sett opp den to-dimensjonale spenningstensoren.

b (vekt 10%)

Bruk ligningene utledet i **a** til å uttrykke Youngs modul med Lame-konstantene for den to-dimensjonale staven. Bestem Poissons forhold til dette mediet.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 Grensesjikt (vekt 50%)

Vurdering av strømningen i grensesjikt er viktig for vindkraft, masse- og momentumtransport mellom atmosfære og hav, og erosjon på havbunnen o.a. Oppgaven omhandler aspekter ved grensesjikt.

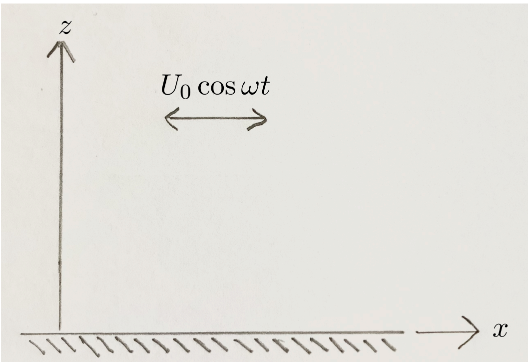
a (vekt 10%)

Sett opp de tre hovedantakelsene / hovedforenklingene som gjelder for et stasjonært grensesjikt til et viskøst fluid.

b (vekt 10%)

For et to-dimensjonalt, stasjonært grensesjikt, langs et horisontalt plan, til et viskøst, inkompressibelt fluid, sett opp hovedligningene for bevegelsen og forenkl så disse jfr. hovedforenklingene fra oppgave **a**. Formuler randbetingelsene. Strømningen utenfor grensesjiktet har en konstant hastighet U_0 langs horisontal retning. Innfør relevante størrelser.

c (vekt 10%)



Resten av oppgaven omhandler et svingende grensesjikt. Et viskøst, inkompressibelt fluid er begrenset nedentil av $z = 0$. Bevegelsen er to-dimensjonal i det vertikale xz-planet. Veggen (bunnen) ved $z = 0$ er fast. Bevegelsen drives av den horisontale svingningen $U(t)\mathbf{i} = U_0 \cos \omega t\, \mathbf{i}$ som gjelder når $z \to \infty$. $\mathbf{i}$ er enhetsvektor langs x-aksen. Det er ingen trykkgradient.

Anta at hastighetsfeltet er på formen $u(z,t)\mathbf{i}$. Det er ingen vertikalhastighet. Bruk bevegelsesligningen for et inkompressibelt viskøst fluid til å vise at $u(z,t)$ oppfyller

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1}$$

for $z > 0$, der ν er kinematisk viskositetskoeffisient.

Formuler randbetingelsene for hastighetsfeltet.

(Fortsettes på side 4.)

d (vekt 10%)

Vi antar at (1) har løsning på formen

$$u(z,t) = A\cos\omega t + Be^{k_1 z}\cos(\omega t + k_1 z) + Ce^{-k_2 z}\cos(\omega t - k_2 z)$$

der k_1 og k_2 er positive konstanter som skal bestemmes. Konstantene A, B og C skal bestemmes.

e (vekt 10%)

Vi betrakter hastighetsfeltet $u(z,t)$ til et viskøst fluid som tilfredsstiller ligning (1). Utled ligningen for den mekaniske energien for bevegelsen. Benytt også ligningen for den totale energien. Det er ingen tilført varme eller noen trykkgradient. Vis ved utledning at dissipasjonen tilfredsstiller

$$\Delta = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

SLUTT